記号論理学

清水義夫 著

東京大学出版会

記号論理学

清水義夫 著

東京大学出版会

はしがき

記号論理学は，すでにライプニッツにその構想があったとはいえ，現実には前世紀中頃より，ブールやシュレーダーによって，また彼らとは独立にフレーゲによって，ようやくその本格的な具体化が始められた．しかし今世紀のはじめには，ホワイトヘッドとラッセルの共著『数学原理』において，フレーゲの仕事を中心にそれまでの成果が集大成され，新しい研究への足場が築かれるまでに至っている．実際それ以後記号論理学は，とりわけゲーデルが出現する30年代には飛躍的に進展することになり，さらに60年代には一応の完成ともいえる段階に達している．とにかくこのように，記号論理学の成立と発展は，比較的新しい事柄といえる．

しかしそれにもかかわらず，そこでの考え方や諸成果の一部は，数学や情報科学をはじめ，哲学や言語学など種々の分野において，今日ではすでに常識となって浸透してきている．これは，記号論理学での言語の捉え方や，それにもとづく推理論，さらには公理系についての諸考察などが，きわめて一般性の高いものであることによると思われる．そこで，上記の分野に関心のあるひとはもとより，より広い範囲のひとびとも，一度はまとまったかたちで記号論理学を概観しておくことは，必ずしも無意味とはいえないように思う．

さて本書は，以上の事情を考慮しつつ，記号論理学の最初の部分について，しかもその中でも最も基礎的な事柄について，はじめて学ぶひとを念頭に概説したものである．しかし概説とはいえ，取り上げた題目については，そこに登場する諸概念や諸事項をしっかり理解していただけるよう，冗長にならない範囲で，なるべく丁寧に述べるよう努めてみた．これは，記号論理学とはいかなるものか，ということを理解するためにも，また本書に続く次の段階への移行を容易にするためにも，さらにまた本書で触れなかった題目の学習を容易にするためにも，必要なことと考えたからである．しかしいろいろと不備な点もあるかもしれない．この点は，読者の皆さんから忌憚のないご批判をいただけた

らと思う．とにかく本書によって，記号論理学を多少なりとも身近にしていただけたら，著者にとってこんなに喜ばしいことはない．

なお本書は東京大学教養学部での講義草稿がもとになっている．ここに，講義の機会を与えていただいた井上忠先生をはじめ，教養学部哲学研究室の諸先生方に深くお礼を申し上げる．また藤本隆志先生には出版についてもお世話いただいた．重ねてお礼を申し上げたい．さらにまた，かつてご指導をいただいた東京工業大学の吉田夏彦先生にもこの場でお礼を申し上げる．

1984年9月

著　者

目　　次

第4章　完全性定理

第5章　ブール代数と論理

(◇印は「補遺」を表わす)

序

論理学の課題と方法

ある分野についての知識が数多くある場合，単にそれらを羅列していくのは，知識の整理法として賢いとはいえない．とりわけその知識が無限個あれば，羅列していくだけではいつまでたっても終らない．そこである分野の知識は，それが無限個ある場合を含め，そうした知識の中から代表的なものを選出し，残りのものはすべてそこから引き出していく，という仕方で整理されるのが普通である．選出された代表者のみを手元に置いておくことによって，他はいつでも引き出せるわけであり，理屈の上では，その分野の知識の全体をつねに手中に収めている，ともいえるからである．そしてこれが，ある分野の知識を「公理化」(axiomatize) して捉えるということであり，ユークリッド Euclid の昔から，多くの学的な知識の整理がこの方式によって試みられてきた．

しかしはたして，このような試みは原理的に可能なのであろうか．もし文字通り可能であるなら，公理化の試みは，有限的なわれわれが無限的な全体を把握する試みともいえ，それはきわめて興味深い．そこでそれが可能となる事情をはっきりと理解する必要があろう．またたとえ文字通り 100 パーセント可能でなくとも，公理化がそれなりに便利な整理法である以上，どのような事情で可能でないのかを，はっきり理解しておくことは必要であろう．つまりいずれにせよ，公理化の可能性に対する反省は，学の方法論としても，またわれわれの知性の性格を知る上でも，考察に値する重要な課題の１つとなってくる．そしてこの課題こそ，今日普通考えられている意味での論理学，すなわち「記号論理学」(symbolic logic) の中心的な課題に他ならない．

では，どのような段取りでこの課題に向っていったらよいか．まず第１は，代表となるもの，すなわち「公理」(axiom)から他のもの，すなわち「定理」(theorem)を引き出すその引き出し方，すなわち「推論」(inference)過程の解明である．Aという定理を得るためには，Aでないと仮定して矛盾を引き出せばよい，といった一見頼りない論法(背理法)をはじめ，種々の推論が展開されるが，まずはそうした推論法が正当なものか否かなどの検討がなされねばならない．つまり推理論の確立が何にも先立って必要な仕事となる．第２には，確立された推理論の成果をふまえて，各々の分野の公理化の試みを改めて一層自覚的に構成し直すことが必要になろう．すなわち明確なかたちでの「公理系」(axiomatic system)の構成である．そしてその上で，構成された各々の公理系について，それが本当に意味のある全体把握を実現し得るものであるか否か，という検討が，最後の仕事になってくる．つまりまとめていえば，今日の論理学の課題は，1) 推理論の確立および 2) 公理系の構成とその可能性の検討(すなわち公理論の展開)である，といえよう．

さてそれでは，論理学はどのような方法によって，以上の課題と取り組んでいくのか．第１の推理論に対してはどうか．実際，推論過程は心的な過程ともいえ，真っ正直に問題にすると，その糸口すらつかめない．心的過程は私的であり，時空的な位置づけすら難しいからである．しかし推論過程という思考過程には，幸いつねに言語過程が伴っている．そしてこの言語過程は，音声や文字という公共的な側面をも持っている．そこで論理学は，この推論過程に伴う言語過程に注目し，そこに課題解決の手がかりを求めるのである．すなわち論理学は，どの言語にも見出せる基底的な事柄，とくにつねに成立する言い回しの規則のようなものを探り出し，それを人工的な記号を使って定式化し，さらにそれらを整理するという仕方で，正しい推論というものを明らかにしようとする．

次に第２の公理論に対してはどうか．推理論の成果を適用するためにも，また公理系を明確にするためにも，まずは，公理をはじめすべての表現を，推理論に導入した人工的な記号を使って定式化するという仕方で，公理系の構成を実行する．公理から定理を引き出す過程が，単に記号操作の１つとして理解できるほどに，純粋に記号の体系として公理系を構成しようとするのである．と

同時に一方で，公理化の意図から自然に要求される事柄(すなわち意味ある全体把握など)を，構成された公理系に要求されるいくつかの条件としてまとめる．そしてその上で，各々の公理系がこれらの条件を満足するか否かを調べることによって，公理化の可能性についての検討を進めようとするのである．

本書の構成

論理学の課題と方法についてその大約を述べた．しかし，本書では第1の課題を中心としており，第2の課題については，論理の公理系についてのみの展開に終っている．ある分野の公理系を具体的に構成し，さらにそれらの可能性を真正面から検討することは，量および質(技術的な)ともに，論理学の第1教程である本書の枠を越えてしまうからである．以下，本書の構成について簡単に触れておく．

第1章と第2章は，推論過程の解明である．すなわち正しい推論とは何か，正しい推論をどう進めるか，などが取り扱われる．そのために，第1章では，まず言語についてのきわめて簡単で基本的ともいえる事柄，すなわち文が言語の単位であること，およびそうした文には単文と，いくつかの単文と否定詞や接続詞からできている複合文とがあることなどが注目され，これらの事柄と推論との関係が明らかにされる．続く第2章では，文がさらにいくつかの単語の結合したものであることが注目され，その点からきめ細かく推論の問題が明らかにされる．つまりこの2つの章によって，記号論理学での推理論の要点を見ていくことにする．

なお第1,2章とも，すでに言及したように，言語の中の注目される事柄をはじめ，考察の対象はすべて記号化された上で議論される．ところで，この記号に対しては2つの異なった立場が可能である．1つは目前の明証的な記号形態のみにもっぱら注意を向け，推論なども目前の記号の組合せ的な操作と捉えていく立場であり，「構文論」(syntax)と呼ばれる．これに対して，もう1つは，目前の記号も記号である以上，その背後には，当然それが表現する意味があると考え，そうした側面をも必要に応じて積極的に認めていく立場である．こちらは「意味論」(semantics)と呼ばれ，超越的な要素も混入してくるが，分かりやすい面もある．本書の第1,2章は，文の真，偽ということを中心に種々の考

察が進められており，意味論の立場に立った推理論となっている．

次に第3章では，まず論理の公理系が例示される．すなわち第1,2章で明らかとなった正しい推論のすべてを，公理化することによって把握する．これは，推理論の完成のためにも，またある分野の公理系がこの論理の公理系と融合するように構成されることからも，是非必要となる．実際，引き続いてさらに，一般的なかたちではあるが，論理の公理系と結びついたある分野の公理系(すなわち理論)についても言及する．

ところで記号論理学で公理系が考えられる場合，先にも述べたように，それは純粋に記号の体系として構成される．そこでこの章で例示される論理の公理系は，論理に対する構文論的な立場からの把握の一例にもなっている．つまり第3章は，第1,2章とは異なった立場からの推理論でもある．

第4章では，まず一般に公理系に要求される3つの条件(すなわち無矛盾性，完全性，公理相互の独立性)を提示する．その上で，論理の公理系については，それらが満足されることを，とくに完全性を中心にして証明する．つまり，少なくとも論理の公理系については，公理化が目ざすところは十分に実現されることが示される．論理の公理系で完全性の条件が満たされるということは，無限個ある正しい推論のすべてが，公理化によって把握可能であることを，意味しているからである．なおまたこの完全性の成立は，第1,2章の意味論的立場から明らかにされることと，第3章の構文論的に明らかにされることとが，対応してくることを示すことにもなる．

第5章では，論理で中心となる推論関係が一種の順序関係と考えられることに注目し，第4章までとは全く異なった視点から，改めて論理を抽象的に見直していく．このことによって，すでに明らかにされている基本的な推論規則(たとえば L_G の公理として登場するようなもの)の意味や，なぜ論理の公理系では完全性が成立するのかなど，論理に対する理解を一層深める手がかりが与えられるからである．

追記　記号論理学を，とくにその推理論を，はじめてのひとが急いで概観したい場合には，第1,2章でほぼ十分である．実際，さらに第3章の§3.4や第4章の§4.1などを追加すれば，それでだけで記号論理学の初歩のコースとなろう．

また論理の公理系やその完全性などに関心のあるひとは，第 1, 2 章をとばして第 3 章から始めることも可能である．つまり第 3, 4, 5 章は，論理学の中級コースの種々の議論への繋がりをも考慮した初級コースの内容となっている．

第1章　命題論理

命題とは文のことであり，命題論理は，文に関連した基本的な事柄，すなわち文の肯定否定，および文と文との接続詞による結合などの事柄にもっぱら注目し，その上で推論ということを考察していく．まず§1.1では，注目する事柄を記号で表わし，命題を論理式として捉える．続く§1.2では，命題とは真偽(真理値)ということが考えられるもの，という立場に立って，§1.1で注目した否定や接続詞などの働きを明確に定義する．と同時に論理式の性格が，それを構成する要素となる命題の真偽と式全体の真偽との関係を分析することによって，明らかになることを示す．そしてその結果，論理式の中には，構成する命題の真偽に関係なくつねに真となる式(トートロジー)が存在することを示す．次に§1.3では，前提から結論を引き出す推論について，正しい推論がいかなるものかを問題にする．そしてそれがトートロジーと対応するものであることを明らかにする．§1.4では，§1.3で示された原理に立って，具体的にはどのように推論を進めるべきかを問題にする．

§1.1　論　理　式

「命題」(proposition)とは文のことであり，「命題論理」(propositional logic)は，文の肯定と否定および文と文との接続詞的結合という，文に関連した基本的な事柄のみに，もっぱら注目する．それゆえ命題論理は，これらの事柄をはっきりさせるためにも，下に述べるような仕方で文を記号化することから始まる．文にとって大切なそれが表現する具体的な意味内容なども，命題論理にとっては雑音にすぎず，差し当りは記号化によって捨象してしまうのである．そしてこのように文を記号化したものが，命題論理の「論理式」(well formed formula)と呼ばれるものとなる(正式な定義は後述する)．

文の記号化

1) 単純命題の記号　最も簡単な文，すなわち文の内部にもはや文といえる部分を見出し得ないような肯定形の単文のことを，「単純命題」(simple proposition) といい，その各々を記号 $P, Q, R, \cdots$, etc. を使って表わす.

例　i)「コアラは有袋類である」は P と表わされる.

ii)「5+7=12」も単に Q と表わされる.

2) 結合子の記号　単純命題とみなされる文を除いた文は，「複合命題」(compound proposition) と呼ばれる．すなわちそれは，文の内部にさらにいくつかの文といえる部分を見出し得る文であり，いくつかの単純命題と次に述べる「結合子」(connectives) から構成されているものとみなされる．そこでその記号化に先立って結合子の記号が必要となる.

i) 否定の記号　否定詞「でない (not)」に代表される否定機能の表現を「否定」(negation) といい，それを記号 $\neg$ で表わす.

ii) 連言の記号　接続詞「そして (and)」,「しかし (but)」に代表される結合機能の表現を「連言」(conjunction) といい，それを記号 $\wedge$ で表わす.

iii) 選言の記号　接続詞「または (or)」に代表される結合機能の表現を「選言」(disjunction) といい，それを記号 $\vee$ で表わす.

iv) 条件法の記号　接続詞「もし—ならば—(if—, then—)」,「—であるとき，—(when—, —)」に代表される結合機能の表現を「条件法」(conditional) といい，それを記号 $\supset$ で表わす.

3) 複合命題の記号　複合命題は，単純命題の記号と結合子の記号，さらに必要な場合には補助記号として括弧(,)なども使って記号化される.

例　i)「9は素数ではない.」:　$\neg P$　(ただし,「9は素数である」を P とする).

ii)「彼は頭はいいが，学校の成績は悪い.」:　$P \wedge Q$　(ただし,「彼は頭はいい」を P とし,「学校の成績は悪い」を Q とする).

iii)「このスイッチを押すならば，ベルが鳴る.」:　$P \supset Q$　(ただし,「このスイッチを押す」を P とし,「ベルが鳴る」を Q とする).

iv)「彼はフランス語かドイツ語かどちらか一方だけは話せる.」:　$(P \vee Q)$

$\wedge\neg(P\wedge Q)$ (ただし,「彼はフランス語を話せる」を P,「彼はドイツ語を話せる」を Q とする).

v)「ある数が2でも割れずまた3でも割れないなら,ある数は6でも割れない.」: $(\neg P\wedge\neg Q)\supset\neg R$ (ただし,「ある数が2で割れる」を P,「ある数が3で割れる」を Q,「ある数は6で割れる」を R とする).

問 次の文を記号化せよ. 1) 物が燃えるためには,酸素の供給が必要である. 2) 新幹線を使っても,飛行機を使っても,博多へ行ける.

論理式の定義

この節のはじめにも触れた通り,上のように文を記号化したものが命題論理の論理式であるが,正式には次のように定義される.

定義 1) 単純命題の記号,すなわち $P, Q, R, \cdots$ あるいは P_i(ただし $i=1, 2, 3, \cdots$)は,論理式である.

なお単純命題の記号は「要素式」(elementary formula)とも呼ばれる.

2) A, B を論理式とすると,$(A)\wedge(B)$, $(A)\vee(B)$, $(A)\supset(B)$, $\neg(A)$は,各各論理式である.

ただし,( )内が要素式あるいは否定記号が一番外側についた論理式である場合には,( )を省略したものを論理式とする.

3) 1), 2)によって論理式とされるもののみが論理式である.

注意 i) 上のようなスタイルの定義は「帰納的」(recursive)な定義と呼ばれ,後にもときどき現われる. ii) A, B, C etc. 大文字のアルファベットの前の方を使って論理式を表わすことは,以下でもしばしば使用する記号法である.なお単純命題を表わす P, Q, R etc. は,アルファベットの後半であり,混乱は生じない. iii) 2)のただし書きは,$(P)\wedge(Q)$, $(\neg(P\vee Q))\supset(\neg(P\wedge Q))$, $\neg(\neg(P\supset Q))$などを論理式から除外する.その各々に代って,$P\wedge Q$, $\neg(P\vee Q)\supset\neg(P\wedge Q)$, $\neg\neg(P\supset Q)$が論理式とされる.なお,より一般的な括弧の省略法としては,結合子の間に結合の強さを,「$\neg$」>「$\wedge$」=「$\vee$」>「$\supset$」の順で決めることによる方法もある.それを使うと,$(P\wedge Q)\supset\neg R$ は $P\wedge Q\supset\neg R$ と表わされる. iv) 論理式は以下において単に式と呼ばれることもある.また wff と略記されることもある.

§1.2 真理値分析とトートロジー

真理値

前節では，命題論理が注目する事柄を浮き彫りにするために，それらを記号化してみた．しかしもとよりそれだけでは，議論はいっこうに進まない．大切なことは，記号によってはっきりした命題の結合関係などに対して，さらにその性格や特徴を指摘できるようになることである．しかしそのためには，単に文のことを命題と言いかえたにすぎないような前節の立場に留まっていたのでは，十分ではない．すなわち改めて命題ということをもう少し明確に限定する必要がある．そこで以下の第1章と第2章では，命題とは真理値をもつ表現である，という限定を与えることにする．ただし，ここで「真理値」(truth value)とは，真，偽のことであり，また以下ではその各々を1, 0という記号で表わすことにする．

注意 なお，真理値を問題にしていくことは，序で触れた意味論の立場に立つことでもある．

実際，確かに真，偽が問題にできるのは，「ゴヤはスペインの画家である」，「9は素数である」といった文であり，「ゴヤ」「スペインの画家」「9」「素数」といった語のレベルでは真，偽は問題にできず，上の限定は文を命題とすることと対立する限定ではない．しかし一方で上の限定は，文であってもその真，偽が考えられない命令文や感嘆文などを，命題から除外する．また「私の言っていることは嘘である」などのように，たとえ平叙文であっても，その真，偽に問題があるものも除外する．結局，いわばしっかりした情報を担っている素直な平叙文が，命題と考えられることになるといえよう．

結合子の定義

さて，命題は真理値をもつ表現である，という限定を採用すると，前節で否定，連言，選言，条件法と名づけた機能の各々に対して，改めてその性格をそれなりに明確に定義することができるようになる．

1) **連言(∧)の定義** 真理値という点から見た連言∧の性格は，∧で結合さ

れる命題 A, B 各々の真理値を x, y とし，命題 $(A) \wedge (B)$ の真理値を z とするとき，x, y 各々の値(1 または 0)に対して z がどのような値(1 または 0)をとるかを指定してやる仕方で，定義づけることができる．つまり $\wedge$ は，$z = f_{\wedge}(x, y)$ という関数 $f_{\wedge}$ として，しかも具体的には表 1.1 で示されているように定義される．すなわち x と y がともに 1 のときのみ z は 1 となり，その他では z は 0 となる関数として定義される．なおこの $f_{\wedge}$ のような真理値間の関数を「真理関数」(truth function) といい，またそれを表わす表を「真理値表」(truth value table) という．

表 1.1

x　y A,　B	z $(A) \wedge (B)$
1　1	1
1　0	0
0　1	0
0　0	0

2)　選言($\vee$)，条件法($\supset$)，否定($\neg$)の定義　選言 $\vee$，条件法 $\supset$，否定 $\neg$ についても，連言 $\wedge$ と同様に各々真理関数 $f_{\vee}, f_{\supset}, f_{\neg}$ として，しかも具体的には表 1.2，表 1.3 で示されるように定義される．

表 1.2

x　y A,　B	z $(A) \vee (B)$	z $(A) \supset (B)$
1　1	1	1
1　0	1	0
0　1	1	1
0　0	0	1

表 1.3

x A	z $\neg(A)$
1	0
0	1

注意　上の $\wedge, \vee, \neg$ の真理関数的な定義は，「そして」，「または」，「でない」という語の日常的な語感と比較的一致している．しかし $\supset$ の定義は，前件($\supset$ の左側の部分)が偽のとき，後件($\supset$ の右側の部分)の真偽に関係なく，全体を真にしてしまう結合として捉えられている点など，「ならば」の語感からは理解しにくいところを含んでいる．

論理式の真理値分析

さて，以上のように結合子が真理関数として定義されてくると，任意の論理式に対して，その論理式を構成している要素式の真理値と，その論理式自体の真理値との関係を見定めるという仕方で，論理式のもつ性格を指摘してやることが可能となる．たとえば，$(P \wedge \neg Q) \supset Q$ なる論理式が与えられたとき，$(P \wedge \neg Q) \supset Q$ 全体の真理値 z と，それを構成している要素式 P, Q の真理値 x, y

表 1.4

x	y	z				
P,	Q	$(P\wedge\neg Q)\supset Q$				
		①	②	③	④	⑤
1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0

との関数関係 f (i.e. $z=f(x,y)$) がどのようなものかを，$\wedge, \neg, \supset$ の定義にしたがって明確にする仕方で，この結合の性格を理解できるのである．つまり論理式を，$\wedge, \vee, \supset, \neg$ の各々に対応する真理関数から合成された真理関数と考え，その上でこの関数を明確にしようとするわけである．そして以下，この手続きを，論理式の「真理値分析」(truth value analysis) と呼び，具体的にはそれは論理式の真理関数を表わす真理値表を求める作業になってくる．すなわちいまの例の場合，それは表 1.4 のような真理値表をつくることである．

注意 P, Q が各々 1 である 1 行目を説明しておく．①⑤は，P, Q と同じゆえ各々 1．③は $\neg Q$ ゆえ，$\neg$ の定義より 0．②は，①③と $\wedge$ の定義より 0．そしてこの行の最後の結果である④は，②⑤と $\supset$ の定義により，1 となる．他の行も同様にして求める．

すると表 1.4 から，$(P\wedge\neg Q)\supset Q$ は，P が 1 で Q が 0 のときのみ 0 となり，その他では 1 となる結合であることが分かり，よってこの式は，結局 $P\supset Q$ と真理関数として同じものであることなどが，指摘できてくる．

もう 1 つ例を添えておこう．すなわち要素式として P, Q, R の 3 つを含むような論理式 $((P\supset Q)\wedge(Q\supset R))\supset(P\supset R)$ の真理値分析である．明らかにこの式には，$u=f(x,y,z)$ なる真理関数が対応しており，その真理値表は表 1.5 のように 8 行 ($=2^3$ 行) からなるものになる．なお，要素式の数が n 個からなる式であれば，その真理値表の行数は 2^n 行となる．

表 1.5

x	y	z	u
P,	Q,	R	$((P\supset Q)\wedge(Q\supset R))\supset(P\supset R)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

注意　3行目と最終結果だけ記しておく．

この場合も，このように分析してみると，与式が要素式の真偽に関係なくつねに真となるといった，きわだった性格をもっていることなどが，分かってくるのである．

問　1) 表1.5を完成せよ．2) $\neg(P \wedge \neg Q)$の真理値表を求めよ．

論理式の分類

この節に入って，命題は真理値をもつ表現である，という立場に立つことにより，各々の論理式の性格を指摘できる真理値分析という，ささやかではあるが強力な道具立てを手に入れた．そしていまこの道具立てを使って論理式を見るとき，論理式は次のように3つに自然に分類されてくる．第1のものは，上の例にもあったように，その論理式を構成している要素式の真理値のとり方に関係なくつねに真となる式であり，これは「恒真式」あるいは「トートロジー」(tautology)と呼ばれる．第2のものは，論理式を構成している要素式の真理値のとり方によって，全体としては真にも偽にもなる式で，「整合式」(consistent wff)と呼ばれる．第3のものは，その論理式を構成している要素式の真理値のとり方に関係なくつねに偽となる式で，「恒偽式」あるいは「矛盾式」(contradictory wff)と呼ばれる．すなわち真理値表でいえば，第1のものは最終結果がすべて1となる式であり，第2のものは，最終結果に1と0がともに現われる式であり，第3のものは，最終結果がすべて0となる式である．そしてこのうちとくに第1のトートロジーは，$\wedge, \vee, \supset, \neg$についてのいわば公式といえるもので，次節で明らかになるように推論と深くかかわってくるほか，いろいろと利用され，論理学では重要なものである．そこで次に，トートロジーの中でもとりわけ基本的と思われるものを，予めいくつか例示しておこう．

トートロジーの例

以下でのA, B, Cは各々任意の論理式とする．

1. $(A) \supset (A)$　　同一律(law of identity)
2. $(A) \vee \neg(A)$　　排中律(law of the excluded middle)
3. $\neg((A) \wedge \neg(A))$　　矛盾律(law of contradiction)

注意 Aは論理式であることから，最も簡単な場合はPなどであり，このとき1は，$P \supset P$であるが，Aはもとより$P \wedge \neg Q$といった場合もあり，このとき1は$(P \wedge \neg Q) \supset (P \wedge \neg Q)$である．つまりトートロジーの例示というより，正確にはトートロジーとなる式の型すなわち「図式」(schema)の例示である．

4以下を例示する前に準備が1つ必要である．それは，次のように定義される「同値」(equivalence)と呼ばれ，≡なる記号で表わされる新しい結合子の導入である．実際これによって4以下のトートロジーを簡潔に示すことができる．

表1.6

A, B		$(A) \equiv (B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

定義 $(A) \equiv (B) \underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} ((A) \supset (B)) \wedge ((B) \supset (A))$.

または左の真理値表で定義する．

4. $A \equiv \neg\neg A$ 二重否定の法則(law of double negation)

5. i) $A \wedge A \equiv A$ 第1
 ii) $A \vee A \equiv A$ 第2
 } 巾等律(idempotent law)

注意 4の場合，正式には$(A) \equiv (\neg\neg(A))$であり，5の i)は$((A) \wedge (A)) \equiv (A)$である．しかし4, 5および6以下では，見やすくするため§1.1で触れたように結合の強さなどを考え合せ，分かる範囲で括弧を省略する(なお≡は結合の強さという点では，他の結合子と比べて一番弱いものとしておく)．

6. i) $A \wedge B \equiv B \wedge A$ 第1
 ii) $A \vee B \equiv B \vee A$ 第2
 } 交換律(commutative law)

7. i) $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ 第1
 ii) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ 第2
 } 結合律(associative law)

8. i) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ 第1
 ii) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ 第2
 } 分配律(distributive law)

9. i) $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ 第1
 ii) $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ 第2
 } 吸収律(absorptive law)

10. i) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ 第1
 ii) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ 第2
 } ドゥ・モルガンの法則(De Morgan's law)

11. $A \supset B \equiv \neg B \supset \neg A$ 対偶律(law of contraposition)

12. $(\neg A\wedge(A\vee B))\supset B$　　選言的三段論法(law of disjunctive syllogism)

13. $(A\wedge(A\supset B))\supset B$　　前件肯定式(modus ponens)

14. $((A\supset B)\wedge(B\supset C))\supset(A\supset C)$　　推移律(transitive law)

15. i)　$(A\supset(B\supset C))\supset((A\wedge B)\supset C)$　　移入律(law of importation)

ii)　$((A\wedge B)\supset C)\supset(A\supset(B\supset C))$　　移出律(law of exportation)

16. i)　$(A\wedge B)\supset A$
ii)　$(A\wedge B)\supset B$　　縮小律(law of simplification)

17. i)　$A\supset(A\vee B)$
ii)　$B\supset(A\vee B)$　　拡大律(law of addition)

18. $((A\supset C)\wedge(B\supset C))\supset((A\vee B)\supset C)$　　構成的両刃論法(law of constructive dilemma)

19. i)　$A\supset B\equiv\neg(A\wedge\neg B)$,　ii)　$A\supset B\equiv\neg A\vee B$

20. $\neg A\supset(A\supset B)$

21. i)　$A\wedge 1\equiv A$,　ii)　$A\wedge 0\equiv 0$,　iii)　$A\vee 1\equiv 1$,　iv)　$A\vee 0\equiv A$

注意　i) 19, 20, 21には特に普及した名称はない. ii) 21の1はトートロジーを, 0は恒偽式を表わすものとする.

問　上の10, 12, 15の各式がトートロジーであることを, 真理値表をつくって確認せよ.

置きかえの定理など

トートロジーに関連した事柄で, 直観的には自明ともいえるが, 一応は予めはっきりと確認しておきたい事柄として, 次のような補題(補助定理のこと)や定理がある. 実際とくに定理2.3は, ≡を含むトートロジー(先の例に登場したような)を使ってある式を同値変形していくときなどに, つねに前提される.

補題2.1　$A, A\supset B$はともにトートロジーである ⇒ Bはトートロジーである.

証明　Bがトートロジーでないと仮定する(背理法). するとBを0にする真理値の与え方(Bを構成する要素式への)が存在する. しかし一方でAはトートロジーゆえつねに1. すると, $A\supset B$が0となるような真理値の与え方が存在することになり, $A\supset B$がトートロジーであることと矛盾する.　□

補題 2.2 $C[A]$: A が C の部分式として含まれている式とする．$C[B]$: C の中の A のところに(必ずしもすべてのところでなくともよい)，B を代入した式とする．以上のとき，$(A \equiv B) \supset (C[A] \equiv C[B])$ はトートロジーである．

証明 1) A と B が異なる真理値をとるとき．このとき $A \equiv B$ は 0．よって $\supset$ の定義によって $(A \equiv B) \supset (C[A] \equiv C[B])$ は 1.

2) A と B が同じ真理値をとるとき．このとき $A \equiv B$ は 1．またこのとき，$C[A]$ と $C[B]$ も同じ真理値をとるゆえ，$C[A] \equiv C[B]$ も 1．よって $\supset$ の定義によって，$(A \equiv B) \supset (C[A] \equiv C[B])$ も 1. □

定理 2.3 $C[A]$, $C[B]$ は上の補題で規定されたものと同じとする．このとき，次の 1)，2)が成立する．

1) $A \equiv B$ はトートロジーである $\Rightarrow$ $C[A] \equiv C[B]$ はトートロジーである．

2) $A \equiv B$ はトートロジー，$C[A]$ もトートロジーである $\Rightarrow$ $C[B]$ はトートロジーである．

注意 この定理は「置きかえの定理」(Replacement Theorem) と呼ばれる．

証明 1) 補題 2.1 と補題 2.2 とから明らか．

2) $\equiv$ の定義から，$C[A] \equiv C[B]$ がトートロジーなら $C[A] \supset C[B]$ もトートロジーになる．この点を注意すればあとは，上の 1) と補題 2.1 から明らか． □

また「双対の原理」(principle of duality) と呼ばれる定理 2.5 も便利である．しかしその前に補題を 1 つ記しておく．

補題 2.4 $\neg A \equiv A'$ はトートロジーである． ただし A' は，論理式 A の要素式 $P_1, \cdots, P_n$ を各々 $\neg P_1, \cdots, \neg P_n$ に変え，また $\wedge$ を $\vee$ に，$\vee$ を $\wedge$ に変え，さらに 1 を 0 に，0 を 1 に変えることによって得られる式である．

証明 (結合子の数についての帰納法で証明する．) 1) A が要素式のとき．明らか．

2) A が $B \wedge C$ のとき．$\neg A \equiv \neg(B \wedge C) \equiv \neg B \vee \neg C \equiv B' \vee C'$ (帰納法の仮定により) $\equiv A'$.

3) A が $B \vee C$ のとき．略．

4) A が $\neg B$ のとき．$\neg A \equiv \neg\neg B \equiv \neg B'$ (帰納法の仮定により) $\equiv A'$. □

定理 2.5 (双対の原理) 1) i) A はトートロジーである $\Rightarrow$ $\neg A^{\partial}$ はトートロジーである．ii) $\neg A$ はトートロジーである $\Rightarrow$ A^{∂} はトートロジーである．

2) $A \supset B$ はトートロジーである $\Rightarrow$ $B^{\partial} \supset A^{\partial}$ はトートロジーである.

3) $A \equiv B$ はトートロジーである $\Rightarrow$ $A^{\partial} \equiv B^{\partial}$ はトートロジーである.

ただし A^{∂} は，論理式 A の $\wedge$ を $\vee$ に，$\vee$ を $\wedge$ に，さらに 1 を 0 に，0 を 1 に変えて得られる式であり，A の「双対」(dual)と呼ばれる.

証明　($A[P_1, \cdots, P_n, \wedge, \vee, \neg, 1, 0]$ で，A が $P_1, \cdots, P_n, \wedge, \vee, \neg, 1, 0$ から構成されている式であることを表わす．すると A' は $A[\neg P_1, \cdots, \neg P_n, \vee, \wedge, \neg, 0, 1]$，$A^{\partial}$ は $A[P_1, \cdots, P_n, \vee, \wedge, \neg, 0, 1]$ となることに注意する.) 1) i) A がトートロジーであると仮定する．すると $\neg\neg A$ もトートロジー．よって補題 2.4 により，$\neg A'$ すなわち $\neg A[\neg P_1, \cdots, \neg P_n, \vee, \wedge, \neg, 0, 1]$ もトートロジーである．ここで P_i の代りに $\neg P_i$ としてもトートロジーであることは変らない．すなわち $\neg A[\neg\neg P_1, \cdots, \neg\neg P_n, \vee, \wedge, \neg, 0, 1]$ はトートロジーである．つまり $\neg A^{\partial}$ もトートロジーである．ii) 略.

2) 略.

3) $A \equiv B$ がトートロジーであると仮定する．すると $\neg A \equiv \neg B$ もトートロジー．ここで補題 2.4 により，$A' \equiv B'$ すなわち $A[\neg P_1, \cdots, \neg P_n, \vee, \wedge, \neg, 0, 1] \equiv B[\neg Q_1, \cdots, \neg Q_m, \vee, \wedge, \neg, 0, 1]$ もトートロジーである．またここで P_i, Q_j の代りに $\neg P_i, \neg Q_j$ としてもトートロジーであることは変らない．よって $A[\neg\neg P_1, \cdots, \neg\neg P_n, \vee, \wedge, \neg, 0, 1] \equiv B[\neg\neg Q_1, \cdots, \neg\neg Q_m, \vee, \wedge, \neg, 0, 1]$ はトートロジーである．つまり $A^{\partial} \equiv B^{\partial}$ はトートロジーである.　□

◇ 論 理 回 路

§1.2 の知識を前提すると，電卓の原理は容易に理解できる．そこで以下では，たし算のからくりを，たとえば 2 + 3 とボタンを押すと 5 が表示されてくるからくりを，簡単に述べておこう．まず予め注意しておくことは，器械の中では 2 進法で計算が進められるということである．すなわち 10 進法の 2, 3 は各々エンコーダーという回路によって各々 2 進法の 10, 11 にかえられ，その上で 10+11=101 と 2 進法のたし算が行なわれる．そしてその答の 101 がデコーダーという回路によって 10 進法の 5 にかえられ表示されるのである．しかしいまはエンコーダーやデコーダーの回路は省略し，最も中心となる 2 進法の加算回路の部分にのみ注目する．つまり器械はどのようにして 10+11 の計算を行なうかにのみ焦点を絞る.

半加算器　器械といえども人間と同様，最初の位から計算する．そしてこの最初の位を計算する器械を「半加算器」(half-adder)と呼ぶ．すると半加算器(その記号は図1.1のとおり)は，2つのものを加えるゆえ2つの入力(input)部分 X, Y をもつとともに，その位での和(sum) S と場合によっては次の位への桁上げ分(carry) C もあるゆえ，2つの出力(output)部分 S, C をもつ器械である．またその働きは，X, Y へのあらゆる入力の場合を考えると，表1.7のような表によって表わすことができる．

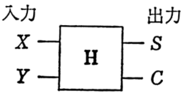


図1.1

表1.7

入力 X, Y		出力 S	出力 C
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

さてすると，ここに§1.2の知識が生きてくるわけで，いまや表1.7は1, 0を真理値とみるとき一種の真理値表とみなすことができる．すなわち表1.7は，X, Y と S の列から明らかなように，X, Y がともに1およびともに0のときのみ S が0となり，その他では S が1となる真理関数であることを表わす真理値表とみなせる．するとさらに S はその真理関数に対応する論理式によって表わすこともできてくる．

実際一般に，真理値分析の逆の操作ともいえる，真理値表からそれを表わす論理式をつくることは可能であり，次のような手続きで求められる(詳しくは「論理式の展開」のところを参照)．まず真理値が1であるある行に注目する．そしてその行における各各の要素式の真理値に応じて，もしその行で1とされる要素式はそのままとし，0とされる要素式には¬をつけることにする．その上でこれらの要素式あるいは否定のついた要素式を∧で結合する．次に真理値が1である別の行に注目し，同様のことを行なう．つまり1となる行のすべてについて同様のことを行なう．そして最後に，各々の行でこのようにして得た式をすべて∨で結合する．するとこれが，当面する真理値表を表わす論理式になる．すなわちいまの S の場合でいえば，1となる行は2行目と3行目であり，2行目では要素式 X は1，Y は0ゆえ，$X \wedge \neg Y$ を得，また3行目では X は0, Y は1ゆえ，$\neg X \wedge Y$ を得，結局 S の真理値表を表わす式は，

$$(X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \tag{1}$$

となる．なお同じことは，もとより桁上げ分 C についてもいえる．すなわち表の X, Y と C の列から，C は，

$$X \wedge Y \tag{2}$$

と表わされるのである．

ところで論理式には，さらにそれに対応するような電気的回路が存在することが一般

にいえる．というのは，論理式は∧，∨，¬という結合子からできているわけであるが，その各々についてその真理値表を表わしているような電気的回路が容易に考えられるからである．つまりそうした回路を論理式に従って組み合せていけば，論理式に対応する回路も容易につくれる，というわけである．そこでまず図1.2に，∧に対応するand-回路，∨に対応するor-回路，¬に対応するnot-回路の原理図を記してみる（なお，こうした基本回路のことは「論理素子」(gate) と呼ばれる）．

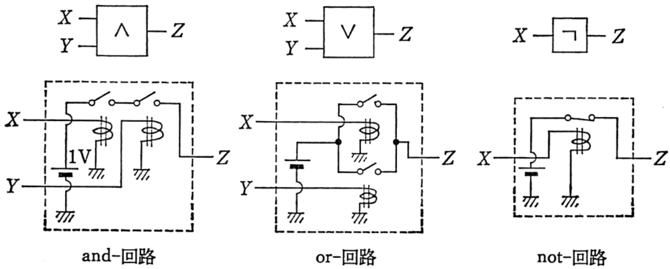


図 1.2

注意　and-回路の場合，X, Y の両方に1Vの入力があるときのみ，Z に1Vの出力が現われることは明らかであろう．したがってこの回路はまさに $X \wedge Y$ の真理値表を表わしているといえる．また or-回路，not-回路についても同様である．

次にこれらの素子を使って，問題の論理式(1)，(2)の回路を，すなわち半加算器の回路を下に（図1.3）記してみよう．

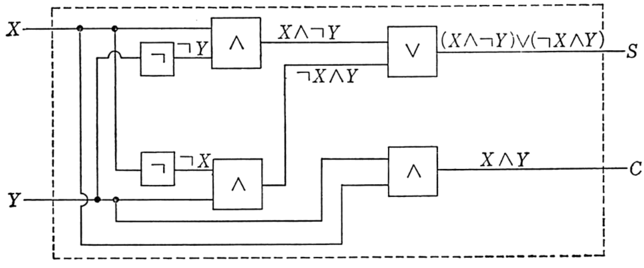


図 1.3

問　not-回路を1つ少なくした半加算器を考えよ．

全加算器　半加算器をつくったのと同様な考え方によって，一般の位を計算する器械

の回路をつくってみよう．なおこの器械を「全加算器」(full-adder) と呼ぶ．まずその働きを表に書いてみよう (表 1.8)．ただ今度は，当面の位の X, Y だけでなく，前の位からの桁上げ分 C をも加えることから，入力は当然 X, Y, C の 3 つとなる．出力はその位での和 S と次の位への桁上げ分 C' の 2 つで，この点は半加算器と変らない (図 1.4 参照)．

表 1.8

X, Y, C	S	C'
1 1 1	1	1
1 1 0	0	1
1 0 1	0	1
1 0 0	1	0
0 1 1	0	1
0 1 0	1	0
0 0 1	1	0
0 0 0	0	0

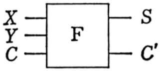


図 1.4

次にこの表を真理値表とみて，それを表わす論理式を先に述べた手続きに従って書いてみよう．ただし S, C' ともにその式は少し長くなるので，いまの場合に限って，$\neg X$ を $\bar{X}$，$X \wedge Y$ を $X\cdot Y$，$X \vee Y$ を $X+Y$ とする記号法を使用する．

$$S:\quad X\cdot Y\cdot C+X\cdot \bar{Y}\cdot \bar{C}+\bar{X}\cdot Y\cdot \bar{C}+\bar{X}\cdot \bar{Y}\cdot C \tag{3}$$

$$C':\quad X\cdot Y\cdot C+X\cdot Y\cdot \bar{C}+X\cdot \bar{Y}\cdot C+\bar{X}\cdot Y\cdot C \tag{4}$$

さて次はこの式に従って回路をつくればよいわけであるが，直接それを実行するのは賢くない．というのは，分配律やドゥ・モルガンの法則などのトートロジーを上手に使って，(3)，(4)の各々を同値変形し，組みやすい形にした上で回路を組むのが定石であるからである．そして普通(3)，(4)は最終的には次の(5)，(6)のように変形される．

$$S:\quad (X\cdot \bar{Y}+\bar{X}\cdot Y)\cdot \bar{C}+\overline{(X\cdot \bar{Y}+\bar{X}\cdot Y)}\cdot C \tag{5}$$

$$C':\quad X\cdot Y+(X\cdot \bar{Y}+\bar{X}\cdot Y)\cdot C \tag{6}$$

問 1) (4)から(6)へ変形せよ． 2) (3)から(5)へ変形せよ．

実際(5)のように変形すると，(5)の $X\cdot \bar{Y}+\bar{X}\cdot Y$ の部分が X, Y を入力とした半加算器の和であり，さらに(5)は，その和と C を入力とした半加算器の和となっていることが分かる．つまり先に示した素子から直接組まなくとも，半加算器を部品として 2 つ使って S の回路を簡単につくれるのである．また(6)についてもそこから，$X\cdot Y$ は X, Y を入力とする半加算器の桁上げ分を利用し，$(X\cdot \bar{Y}+\bar{X}\cdot Y)\cdot C$ は $X\cdot \bar{Y}+\bar{X}\cdot Y$ と C を入力とした半加算器の方の桁上げ分を利用すればよいことが分かる．結局，全加算器の回路は次の図 1.5 のようになる．

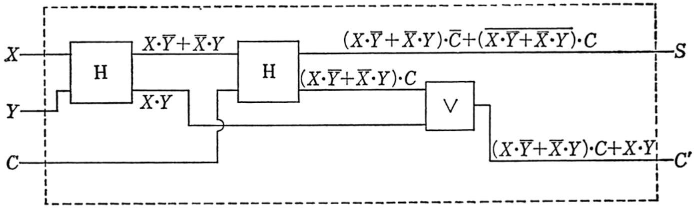


図 1.5

加算回路　以上により最初の位，一般の位を計算する器械ができたので，あとは下の図 1.6 のように配線すれば，明らかに 2 進法のたし算をする回路は完成する(原理として)．なお半加算器はもはや最初の位の計算に使うより，全加算器の部品として使うことにする．

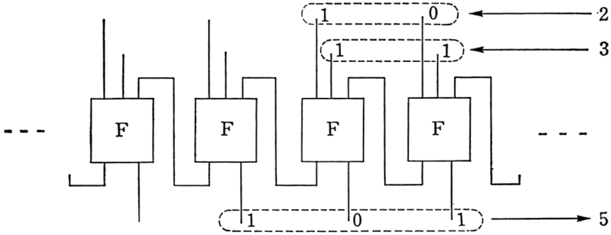


図 1.6

注意　10＋11＝101 の場合の数値を添えておいた．

◇ 論理式の展開

論理回路を述べたところで触れた，真理値表からそれを表わす論理式を求める手続きについて，再び注目してみる．すなわちそれは，まず真理値表の各行の真理値の状態を連言で結合し，さらにその各行が可能な場合の 1 つ 1 つであることから，それらを選言で結合していくといった手続きであった．つまり真理値表という規則性をもった表を，その規則性に従ってそのまま素直に式で描いていくことといえる．とすると，このことはまた，ある任意の論理式 $A[X_1, \cdots, X_n]$ がある一定の規則性をもった論理式に展開できることを示しているともいえる．以下この辺のところを，一般的なかたちで述べておこう．なお $A[X_1, \cdots, X_n]$ は，論理式 A が要素式 $X_1, \cdots, X_n$ から構成されていることを表わす．

論理式の展開 まず表1.9を$A[X_1, \cdots, X_n]$の真理値表とする．そしてその上で各行を式で書くことを考える．ただしその際，X_jが1のときはX_j，0のときは$\neg X_j$として表わすことにする．すなわち真理値e_{ij}に対応する次のような$\tilde{e}_{ij}$なる関数を使って表わしていく．

$$\begin{cases} \tilde{e}_{ij}(X_j) = X_j & e_{ij} = 1 \text{のとき.} \\ \tilde{e}_{ij}(X_j) = \neg X_j & e_{ij} = 0 \text{のとき.} \end{cases}$$

表1.9

$X_1, X_2, \cdots, X_n$	$A[X_1, \cdots, X_n]$の値
$e_{11}\ \ e_{12}\ \ \cdots\ \ e_{1n}$	$A[e_{11}, e_{12}, \cdots e_{1n}]$
$\vdots$	$\vdots$
$e_{i1}\ \ e_{i2}\ \ \cdots\ \ e_{in}$	$A[e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{in}]$
$\vdots$	$\vdots$
$e_{2^n1}\ \ e_{2^n2}\ \ \cdots\ \ e_{2^nn}$	$A[e_{2^n1}, e_{2^n2}, \cdots, e_{2^nn}]$

すると各行は，たとえばi行目は，

$$\tilde{e}_{i1}(X_1) \wedge \tilde{e}_{i2}(X_2) \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_{ij}(X_j) \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_{in}(X_n) \wedge A[e_{i1}, \cdots, e_{in}]$$

と描ける．したがって真理値表全体は各行を$\vee$で結合した，

$$\begin{gathered} (\tilde{e}_{11}(X_1) \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_{1n}(X_n) \wedge A[e_{11}, \cdots, e_{1n}]) \vee \\ \vdots \\ (\tilde{e}_{i1}(X_1) \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_{in}(X_n) \wedge A[e_{i1}, \cdots, e_{in}]) \vee \\ \vdots \\ (\tilde{e}_{2^n1}(X_1) \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_{2^nn}(X_n) \wedge A[e_{2^n1}, \cdots, e_{2^nn}]) \end{gathered}$$

となる．さらに上式は，m個の連言，選言を各々新たに$\overset{m}{\wedge}, \overset{m}{\vee}$なる記号で表わすと，

$$\bigvee_{i=1}^{2^n} \left(\bigwedge_{j=1}^{n} \tilde{e}_{ij}(X_j) \wedge A[e_{i1}, \cdots, e_{in}]\right)$$

となる．そしてこれが$A[X_1, \cdots, X_n]$を表わす真理値表を描いた式ゆえ，結局，

$$A[X_1, \cdots, X_n] \equiv \bigvee_{i=1}^{2^n} \left(\bigwedge_{j=1}^{n} \tilde{e}_{ij}(X_j) \wedge A[e_{i1}, \cdots, e_{in}]\right) \qquad (*)$$

が成立する．また$A[e_{i1}, \cdots, e_{in}]$は1または0であるが，0のときは，$0 \wedge A \equiv 0$, $0 \vee A \equiv A$など使ってその行を表わす部分を消去できる．そしてこれが，回路で使った手続きに他ならない．

(*)の証明 (*)は，上述したように真理値表を介しても得られるが，次のようにnに関しての帰納法を使って直接証明することもできる．

1) $n=1$のとき．i.e. $A[X_1] \equiv (\tilde{e}_{11}(X_1) \wedge A[e_{11}]) \vee (\tilde{e}_{21}(X_1) \wedge A[e_{21}])$の証明．ここで$e_{11}=1, e_{21}=0$であるゆえ，$A[X_1] \equiv (X_1 \wedge A[1]) \vee (\neg X_1 \wedge A[0])$を示せばよい．

i) $X_1 \equiv 1$ のとき．左辺 $\equiv A[1]$．右辺 $\equiv (1 \wedge A[1]) \vee (0 \wedge A[0]) \equiv A[1] \vee 0 \equiv A[1]$.

ii) $X_1 \equiv 0$ のとき．左辺 $\equiv A[0]$．右辺 $\equiv (0 \wedge A[1]) \vee (1 \wedge A[0]) \equiv 0 \vee A[0] \equiv A[0]$.

2) $n=k$ のとき(*)が成立すると仮定する．

$$\begin{aligned}
A[X_1, \cdots, X_k, X_{k+1}] &\equiv (X_{k+1} \wedge A[X_1, \cdots, X_k, 1]) \vee (\neg X_{k+1} \wedge A[X_1, \cdots, X_k, 0]) \\
&\equiv (X_{k+1} \wedge \bigvee_{i=1}^{2^k} (\bigwedge_{j=1}^{k} \tilde{e}_{ij}(X_j) \wedge A[e_{i1}, \cdots, e_{ik}, 1])) \vee \\
&\quad (\neg X_{k+1} \wedge \bigvee_{i=1}^{2^k} (\bigwedge_{j=1}^{k} \tilde{e}_{ij}(X_j) \wedge A[e_{i1}, \cdots, e_{ik}, 0])) \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&\equiv \bigvee_{i=1}^{2^{k+1}} (\bigwedge_{j=1}^{k+1} \tilde{e}_{ij}(X_j) \wedge A[e_{i1}, \cdots, e_{ik}, e_{ik+1}]).
\end{aligned}$$

□

§1.3 推 論—その1—

推論とは

「推論」(inference)とは，いくつかの命題からなる「前提」(premise)から，1つの命題を「結論」(conclusion)として引き出す過程のことである．たとえば次のような過程である．

彼はフランス人かイタリア人である． 彼がイタリア人なら彼はイタリア語を話せる． 彼はイタリア語を話せない．	前提
∴ 彼はフランス人である．	結論

この例は余りにも簡単ではある．しかし一方でわれわれの思考過程と呼ばれるものは，注意してながめてみると，その多くがこの例のように，結局いくつかの命題から，それらをその要素へ分解しかつ組合せをかえて再結合させながら，新しい命題を求めていく過程であり，それは推論といえる．それゆえ，思考過程に関心をもつ論理学としては，推論は古くからその中心的なテーマであった．しかしこの第1章では，そうした推論を全面的に取り上げようとするのではない．差し当りは，命題論理が注目する命題と命題との結合，および肯定や否定という点からのみ，推論ということを解明していくことにする．

そこでまずはじめになされることは，考察の対象となる推論の記号化である．そしてそれは，次のような「推論式」(sequent)として表わされる．

$A_1, \cdots, A_n \to C$ 　ただし $A_i (1 \leq i \leq n)$ は前提に現われる命題の論理式

であり，C は結論となる命題の論理式である．また → は，前提と結論を結ぶ新しい記号であり，推論記号と呼ぶ．

したがって上に記した例の場合，前提に現われる3つの命題が，各々，$P\vee Q, Q\supset R, \neg R$ なる論理式で，また結論は P なる論理式で表わされることから，推論全体は，$P\vee Q, Q\supset R, \neg R\rightarrow P$ なる推論式で表わされることになる．

正しい推論の条件

考察の対象がはっきりしたいま，次に問題になるのは，推論の中でもどのような推論が正しいものであるか，ということである．すなわち，どのような条件を満たしているとき，前提から結論は正しく導き出されているといえるか，あるいはどのような条件を満たしていないとき，誤ってしまうか，という条件を明確にする必要がある．しかしこの問題に対して，命題論理は次のような条件をその解答として提出する．

条件 $\mathbf{C}_1$　$A_1, \cdots A_n\rightarrow C$ は正しい ⇔ $(A_1\wedge\cdots\wedge A_n)\supset C$ はトートロジーである．

すなわち推論式の前提部分の論理式をすべて∧でつなぎ，→の部分を⊃にすることによって得られる論理式がトートロジーであるか否かによって，推論の正誤を考えようとするもので，きわめて簡潔な条件である．と同時に前節の真理値分析の議論と組み合せれば，任意の推論式の正誤を判定することなど，容易に可能となる．たとえば次の推論を考えてみよう．

彼が犯人なら彼にはアリバイはない．

彼は犯人ではない．

∴　彼にはアリバイがある．

この推論は正・誤のいずれであろうか．答は論理学を知らなくとも直ちに明らかであろう．しかし一応上の条件に照してみることにする．そのためにまずこの推論を記号化すると，$P\supset\neg Q, \neg P\rightarrow Q$ となり，さらにそれに対応する論理式をつくると，$((P\supset\neg Q)\wedge\neg P)\supset Q$ となる．そこでこの式を真理値分析すると，表1.10のようになる．

表 1.10

P	Q	$((P\supset\neg Q)\wedge\neg P)\supset Q$						
1	1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0

すなわちトートロジーでないことが分かり，常識での予想通り，上の推論式は誤っていることが改めてはっきりするのである.

意味論的推論

では上の条件は一体どのような考え方によって得られるのであろうか. これを説明するために，まず「意味論的推論」(semantical inference) ということを次のように定義する.

定義 $A_1, \cdots, A_n \models C$ が成立する $\underset{\text{df}}{\Leftrightarrow}$ $A_1, \cdots, A_n, C$ を構成している要素式への真理値の与え方のうち，とくに $A_1, \cdots, A_n$ を同時に 1 とするような真理値の与え方のもとで，C も 1 である.

(なお，$A_1, \cdots A_n \models C$ は，「$A_1, \cdots, A_n$ から C が意味論的に推論される」と読むことにする).

この定義は必ずしも分かりやすいとはいえない. そこで定義を理解するためにも，例として 1) $P \supset Q, P \vee R \models Q \vee R$ および 2) $P \supset Q, P \vee R \models P \supset R$ が成立するか否かを考えてみよう. そしてそのためには表 1.11 のような真理値表をつくってみるとよい.

表 1.11

P, Q, R	A_1 $P \supset Q$	A_2 $P \vee R$	1)のC $Q \vee R$	2)のC $P \supset R$
1 1 1	1	1	1	1
1 1 0	1	1	1	0
1 0 1	0	1	1	1
1 0 0	0	1	0	0
0 1 1	1	1	1	1
0 1 0	1	0	1	1
0 0 1	1	1	1	1
0 0 0	1	0	0	1

すると要素式 P, Q, R への A_1, A_2 を同時に 1 とするような真理値の与え方としては，1 行目，2 行目，5 行目，7 行目の場合であることが分かる. そして 1) の例では，その各々の行において結論 $Q \vee R$ が 1 であることが確認できる. すなわち 1) の意味論的推論は成立している. これに対して，2) の例では，そ

の結論 $P \supset R$ が 2 行目において 0 となることから，A_1, A_2 が同時に 1 のときでも 0 になることが確認され，結局 2) の意味論的推論は成立しないといえる.

上の具体例によって，定義の内容はもはや明らかになったであろう．しかしもう一言添えておく．それは，意味論的推論が，推論の正・誤に対してのわれわれのごく自然な見解を，真理値のみを使って定式化したものである，ということである．すなわち，前提が真であるにもかかわらず偽なる結論を引き出したとすれば，それはその引き出し方に誤りがあるといえる．よって正しい推論である以上，前提が真となるときは，結論も必ず真であることが要求されてくる．つまりこのごく自然な事柄を定式化したものが，意味論的推論なのである.

以上，条件 C_1 の根拠を説明するためにまずは $A_1, \cdots, A_n \models C$ を導入したが，さらにその説明のためには，この意味論的推論 $\models$ について成立する次のような基本的な性質に注目しておく必要がある.

補題 3.1 1) $A_1, \cdots, A_n \models C \Leftrightarrow A_1, \cdots, A_{n-1} \models A_n \supset C.$

2) $A_1, \cdots, A_n \models C \Leftrightarrow \models A_1 \supset (A_2 \supset \cdots (A_n \supset C) \cdots).$

3) $A_1, \cdots, A_n \models C \Leftrightarrow \models (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \supset C.$

証明 1) i) $\Rightarrow$について．$A_1, \cdots, A_{n-1}$ がすべて 1 であると仮定する．その上でまず A_n が 1 のときを考える．このときは $A_1, \cdots, A_n$ がすべて 1 となり，よって前提(i.e. $\Leftrightarrow$ の左辺)より C も 1 となる．したがって $A_n \supset C$ も 1 となる．次に A_n が 0 のときを考える．このときは C の値に関係なく $\supset$ の定義により，$A_n \supset C$ は 1 である．以上により，$A_1, \cdots, A_{n-1}$ がすべて 1 のとき，$A_n \supset C$ も 1 となることが示された．ii) $\Leftarrow$ について(対偶を示す)．左辺が不成立と仮定する．すなわち $A_1, \cdots A_n$ がすべて 1 のとき，C が 0 であると仮定する．すると，$A_1, \cdots A_{n-1}$ がすべて 1 であるにもかかわらず，$A_n \supset C$ は $1 \supset 0$ で 0 となる．すなわち右辺も不成立となる.

2) 明らかに 1) を n 回使うことによって得られる.

3) $A \supset (B \supset C) \equiv (A \wedge B) \supset C$ はトートロジーである(p. 15 参照)．そしてこれを一般化した

$$A_1 \supset (A_2 \supset \cdots (A_n \supset C) \cdots) \equiv (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \supset C$$

も，帰納法を使ってトートロジーであることが示せる(略)．よって 2) とこのトートロジーにより 3) は明らかである. □

条件 C_1 の根拠

さてここまでくると，なぜ正しい推論が満たすべき条件として条件 C_1 を命題論理で打ち出してくるかは，自ずと明らかになってくる．というのは，条件 C_1 の根拠は，ごく自然な見解に従って，正しい推論をそれに対応する意味論的推論が成立することと捉える次の要請に求められるからである．

要請　$A_1, \cdots, A_n \rightarrow C$ は正しい $\Leftrightarrow$ $A_1, \cdots, A_n \vDash C$ が成立する．

すなわちこの要請をもとに，あとは上の補題 3.1 の 3) を使うことによって，条件 C_1 は得られるのである．しかし，ただもう一点注意を添えておくことが必要であろう．それは補題 3.1 の 2), 3) に現われている前提のないところからの意味論的推論ということの内容である．すなわち $\vDash A$ が成立することの内容であるが，$\vDash$ の定義に従って考えるなら，それは A を構成している要素式へのいかなる真理値の与え方のもとでも A がつねに 1 であることに他ならず，結局それは A がトートロジーであることを意味していることが分かる．そこで，$\vDash (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \supset C$ は $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \supset C$ がトートロジーであることとなり，いまや条件 C_1 を完全に得るのである．

§1.4 推 論—その2—

正しい推論の進め方

前節で正しい推論についての原理的な事柄の説明はひと通り済んだ．そこでこの節では，いわばその応用としてその原理をふまえつつも，具体的にはどのように正しい推論を進めていったらよいか，あるいは正しい推論のその正しさの証明をどのように与えたらよいか，といった問題を，以下の例題にそって述べてみよう．

例題 1　次の推論が正しいことを示せ．

山田の記憶が誤っていないなら，田中は例の会議に出席していた．
田中が例の会議に出席していたのなら，田中は犯人ではない．
田中が犯人であるか，中村が嘘をついているかだ．
中村は決して嘘をつかない．

∴ 山田の記憶が誤っている.

まずこの推論を表わす推論式を書いてみると，$\neg P \supset Q, Q \supset \neg R, R \vee S, \neg S \rightarrow P$ となる．すると次に，この推論が正しいことを示すには，この推論式に対応する論理式 $((\neg P \supset Q) \wedge (Q \supset \neg R) \wedge (R \vee S) \wedge \neg S) \supset P$ をつくり，これを真理値分析してトートロジーであることを示せばよい，という方針が立つ．しかしこの方針に直ちに従うことは余り賢いとはいえない．この例のように，登場する要素式が P, Q, R, S と 4 つもある多少複雑な場合には，真理値分析の段階で 2^4 (=16) 行の真理値表をつくらねばならないからである．そこで改めて，あくまでも条件 C_1 にもとづきつつも，より簡単でしかもわれわれの実際の推論過程に近似した，次のような方法が考えられてくる．すなわちそれは，前提の一部から簡単な正しい推論を使って引き出せる式をいくつか引き出し，さらにそれらをもとに再び簡単な正しい推論を使って引き出せる式を引き出し，そして最終的に結論となっている式を引き出してやる，という方法である．具体的には，いまの例題の場合，次のような展開となる.

(1) $\neg P \supset Q$
(2) $Q \supset \neg R$
(3) $R \vee S$
(4) $\neg S$
} 前提

(5) R (3)(4)と $A \vee B, \neg B \rightarrow A$ (選言的三段論法) *1)

(6) $\neg\neg R$ (5)と $A \rightarrow \neg\neg A$ (二重否定) *2)

(7) $\neg\neg R \supset \neg Q$ (2)と $A \supset B \rightarrow \neg B \supset \neg A$ (対偶) *3)

(8) $\neg Q$ (6)(7)と $A, A \supset B \rightarrow B$ (モードゥス・ポーネンス　以下 m.p. と略記) *4)

(9) $\neg Q \supset \neg\neg P$ (1)と対偶

(10) $\neg\neg P$ (8)(9)と m.p.

(11) P (10)と $\neg\neg A \rightarrow A$ (二重否定) *5)

ここで *1) ～*5) が簡単な正しい推論であることは，その推論式に対応する論理式の各々が，§1.2 ですでに紹介した代表的なトートロジーのうちに見出されることからも明らかであろう．たとえば *4) の場合，対応する論理式は $(A \wedge (A \supset B)) \supset B$ であり，これはモードゥス・ポーネンスと呼ばれるトートロジーに他ならず，よって条件 C_1 にもとづき *4) は正しい推論式といえるのである.

とにかく，ここで新たに導入した方法は，複雑な推論を，いくつかのこのような簡単な正しい推論に分解してゆく方法であるといえよう．

例題 2　次の推論式が正しいことを示せ(例文は省略する)．

$$P \supset (Q \vee R), Q \supset \neg P, S \supset \neg R \rightarrow P \supset \neg S \qquad (*)$$

例題1で例示された方法で解答してみよう．すなわちまず3つの前提を縦に書き，そこから引き出されてくる式を4行目以下に記すことにしよう．しかしこの例題の場合，それを実行しようとすると直ちに困難にぶつかってしまう．というのは，4行目をどんな式にしてよいのか，行き詰ってしまうからである．そこでこのような場合には一工夫が必要となる．実際この例題では，その打開策として，すでに§1.3の補題3.1の1)で示した⊨の性質と条件 C_1 とから直ちに得られる次の関係を利用する．

定理 4.1　$A_1, \cdots, A_n \rightarrow B \supset C \Leftrightarrow A_1, \cdots, A_n, B \rightarrow C.$

つまり(*)の結論が⊃を含んでいることから，その前件の部分 P を前提の方へ繰り入れ，その上で後件の部分 $\neg S$ を引き出す推論

$$P \supset (Q \vee R), Q \supset \neg P, S \supset \neg R, P \rightarrow \neg S$$

を，(*)の代りに考えるのである．前提の数が1つでも増えることは，組合せの機会が多くなり，それだけ行き詰りも打開される可能性が出てくるわけである．具体的には次のような展開となる．

(1)	$P \supset (Q \vee R)$	前提(本来の)
(2)	$Q \supset \neg P$	前提(本来の)
(3)	$S \supset \neg R$	前提(本来の)
(4)	P	仮定
(5)	$Q \vee R$	(1)(4)と m.p.
(6)	$\neg\neg P \supset \neg Q$	(2)と対偶
(7)	$\neg\neg P$	(4)と二重否定
(8)	$\neg Q$	(6)(7)と m.p.
(9)	R	(5)(8)と選言的三段論法
(10)	$\neg\neg R \supset \neg S$	(3)と対偶
(11)	$\neg\neg R$	(9)と二重否定
(12)	$\neg S$	(10)(11)と m.p.

例題 3 次の推論式が正しいことを示せ(例文は省略する).

$$P \supset Q, R \vee \neg Q, \neg (P \wedge R) \rightarrow \neg P$$

実はこの例題も行き詰ってしまう例である．しかも例題 2 と異なり結論部分に⊃を含んでいない．しかしこのような場合にも打開策はある．すなわちいわゆる「背理法」あるいは「帰謬法」(reductio ad absurdum) と呼ばれる次の関係を使うとよい．

定理 4.3 $A_1, \cdots, A_n \rightarrow C \Leftrightarrow A_1, \cdots, A_n, \neg C \rightarrow D \wedge \neg D$ (i.e. 矛盾).

注意 この定理は後に示す補題 4.2 と条件 C_1 から直ちに得られる．

つまり問題となっている推論の結論の否定形を，新たな前提として本来の前提に加え，その上でそれらから矛盾を導き出す推論を考えればよいのである．いまの例の場合は次のようになる．

(1)	$P \supset Q$	前提(本来の)
(2)	$R \vee \neg Q$	前提(本来の)
(3)	$\neg (P \wedge R)$	前提(本来の)
(4)	$\neg\neg P$	仮定(背理法の)
(5)	P	(4)と二重否定
(6)	Q	(1)(5)と m.p.
(7)	$Q \supset R$	(2)と交換律と $\neg A \vee B \rightarrow A \supset B$
(8)	R	(6)(7)と m.p.
(9)	$\neg P \vee \neg R$	(3)とドゥ・モルガン
(10)	$P \supset \neg R$	(9)と $\neg A \vee B \rightarrow A \supset B$
(11)	$\neg R$	(5)(10)と m.p.
(12)	$R \wedge \neg R$	(8)(11)と同一律

注意 (12)は，$(A \wedge B) \supset (A \wedge B)$ なる同一律に保証された正しい推論 $A, B \rightarrow A \wedge B$ による．

ところで上の定理 4.3(背理法)は次の補題 4.2 にもとづいており，よってその証明も添えておこう．

補題 4.2 $A_1, \cdots, A_n \vDash C \Leftrightarrow A_1, \cdots, A_n, \neg C \vDash D \wedge \neg D$.

証明 1) ⇒について．$D \wedge \neg D$ は 0 ゆえ，$\vDash$ の定義から，$A_1, \cdots, A_n, \neg C$ の少なくとも 1 つが 0 であることを示せばよい．まず C が 1 のときを考える．

このとき$\neg C$は0となり，直ちに$A_1, \cdots, A_n, \neg C$の少なくとも1つが0であることはいえる．次にCが0のときを考える．このとき，⇔の左辺は前提として成立しているゆえ，$A_1, \cdots, A_n$の少なくとも1つが0でなければならない．よって$A_1, \cdots, A_n, \neg C$の少なくとも1つが0であることもいえる．

2) ⇐について．$D \wedge \neg D$は0，しかも⇔の右辺が前提として成立していることから，$A_1, \cdots, A_n, \neg C$の少なくとも1つが0である．よって，いま$A_1, \cdots, A_n$を同時に1とすると，$\neg C$が0．よってCは1でなければならない．すなわち$A_1, \cdots, A_n \models C$が成立する． □

注意　以上述べた推論法では，簡単な正しい推論を使って少しずつ式を導出していくが，その際の簡単な正しい推論とはどの程度のものと考えるべきか．この点，確かに上の叙述では不明瞭である．そこで一応その答を用意するとすれば，例題2,3で見た行き詰りを解決する補助手段2つと，§1.2で例示したトートロジーに対応する推論があれば，それで十二分であるといえる．しかし第1章の立場では，必ずしも特別に限定する必要はないともいえる．実際，使用する簡単な推論を選別し限定しようとするとき，それはすでに公理化への試みといえるからである．上の一応の答も，後述する論理の公理系の公理と，その公理系の完全性を考慮して答えたものである．

問　次の推論式が正しいことを示せ．

1) $P \supset (R \supset \neg Q), \neg S \vee P, Q \rightarrow S \supset \neg R$

2) $(P \wedge Q) \supset (R \vee S), R \supset S, P \wedge \neg S \rightarrow \neg Q$

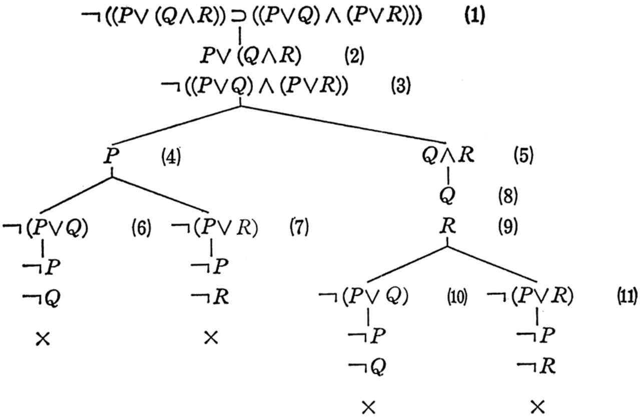
3) $(P \wedge Q) \supset R, \neg S \supset (T \supset U), R \supset \neg (T \supset U) \rightarrow P \supset (Q \supset S)$

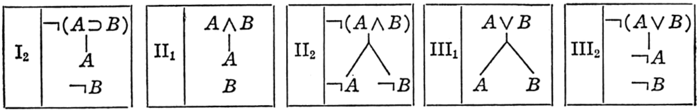
推論の正誤の判定

次に推論の正誤の判定の問題を取り上げる．すなわちいまある推論が与えられたとき，その正誤は一般に不明ゆえ，それを判定してみようという問題である．それゆえ，推論が正しいと分かった上でその証明を与えるという，いままでの問題より強い問題といえる．しかし命題論理では，条件C_1に従って推論式に対応する論理式を真理値分析すればよく，この問題が可能であることは明らかである．ただここでも証明問題と同じ理由から，真理値表をつくっていくという単純な方法は，なるべく避けたい．そこで以下では，論理式がトートロジーか否かを判定するのに，「分析タブロー」(analytic tableau)と呼ばれる方法を例題を使って示しておこう．

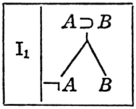
例題1　$P \vee (Q \wedge R) \rightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$の正誤を判定せよ．

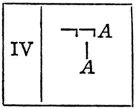
条件 C_1 により $(P\vee(Q\wedge R))\supset((P\vee Q)\wedge(P\vee R))\cdots(*)$ がトートロジーか否かを判定すればよい．そのために分析タブローの方法では，下の図に示すように，$(*)$ が偽になる（i. e. $(*)$ の否定形が真になる）ための条件を少しずつ書いていき，その書き下した条件の系列の各々が矛盾したものであるか否かを調べる．そして，もし条件の系列がすべて矛盾してくるならば，それは $(*)$ を偽にできないということであり，結局 $(*)$ がトートロジーであると判定できる，というわけである．





ここでローマ数字を伴った図式は，分析タブローをつくる規則である．すなわち I_2 は，$\neg(A\supset B)$ が 1 であるためには A が 1 かつ $\neg B$ が 1 であることが要求されることを表わしている．また III_1 は，$A\vee B$ が 1 であるためには A が 1 または B が 1 であることが要求されることを表わしている．他の規則も同様のことを表わしている．したがって上図における(2), (3)は(1)に I_2 を適用した結果であり，(4), (5)は(2)に III_1 を適用した結果である．また(6), (7)は(3)に II_2 を適用し，(10), (11)も同じく，(3)に II_2 を適用した結果である．さらに他の残りの





式も同様にして得られた結果である．なお，こうした規則は上例に現われたもの以外に，I_1, IV の 2 つがあり，それですべてである．また ⋀ 型と｜型があるが，｜型の方をなるべく先に実行するとよい．

さてこのように規則を次々適用していくと，最終的に上図のような木構造をした図ができあがる．そしてその各々の枝は，出発点となる式が成立するための条件の系列を表わすことになる．それゆえ，もし 1 つの枝に同じ要素式の肯定形と否定形が現われる場合には，その枝で表わされている条件では決して出発点の式を成立させることができないことになる．そしてその場合には枝の末端に×印を打つことにする．すると上例では明らかにすべての枝に×印がつき，このことははじめにも述べたように，出発点の式(1)をいかに 1 にしようとしても，それが不可能であることを，すなわち式(*)がトートロジーであることを示している．よって例題 1 の答は正しい，ということになる．

例題 2　次の推論の正誤を判定せよ．

山田か田中が参加できれば，この企画は成功する．
海外に出張中であれば，山田はこの企画に参加できない．
田中も忙しければ，この企画に参加できない．
山田は海外に出張中であるが，田中は忙しくない．

∴　この企画は成功する．

まず推論式を書くと，

$(P \vee Q) \supset R, S \supset \neg P, T \supset \neg Q, S \wedge \neg T \rightarrow R$

となる．次にこの推論式に対応する論理式を考え，その式に¬をつけた式の分析タブローを求めると，次ページのようになる．

さて，このタブローには明らかに×印がつかない枝(○印のところ)がある．すなわち出発点にある式を 1 とすることが可能である．したがって推論式に対応する論理式は，0 にもなり得るものでトートロジーでないことが分かる．つまり例題 2 の推論は誤ったものと判定される．

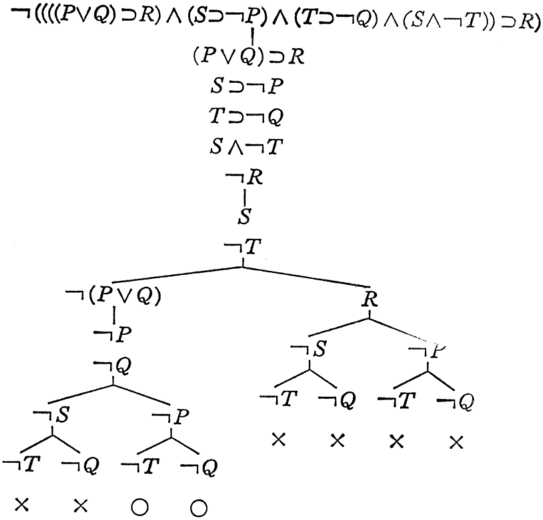
問　次の推論の正誤を判定せよ．なお，「A であるときのみ(only if)，B である」は，$B \supset A$ と記号化される．

相手の不意をつくか，相手の守りの弱いときのみ，その攻撃は成功する．

相手が油断していなければ，不意はつけない．

相手の守りが弱ければ，相手は油断していない．

∴　その攻撃は成功しない．



◇ 標 準 形

推論の正誤の判定の場合をはじめ，ある論理式がトートロジーであるか否かを判定する必要はよくある．しかしそのためにいちいち真理値表をつくって調べるのは，必ずしも上手な方法とはいえない．そこで§1.4の本文では別の方法として分析タブローをつくる方法を示しておいた．しかしさらに別の方法として，論理式の「標準形」(normal form)を利用する方法もある．

選言標準形と連言標準形　標準形には2つの代表的な形があり，1つは，要素式や要素式の否定形が∧で結合され，さらにそうした部分がすべて∨で結合された形になっているもので，「選言標準形」(disjunctive normal form)と呼ばれる．他の1つは，要素式や要素式の否定形が∨で結合され，さらにそうした部分がすべて∧で結合された形になっているもので，「連言標準形」(conjunctive normal form)と呼ばれる．そして任意

の論理式は，いずれの形にも必ず同値変形していくことができる．実際，その点は次の変形の仕方から明らかである．

1) 選言標準形のつくり方　i) 論理式に現われる結合子は$\wedge, \vee, \neg$のみであるようにする．そのために，$(A \supset B) \equiv (\neg A \vee B)$，$(A \equiv B) \equiv ((A \supset B) \wedge (B \supset A))$などのトートロジーを使う．

ii) ドゥ・モルガンの法則などを使って，$\neg$は要素式の前にのみくるようにする．

iii) i), ii)によって選言標準形にならないときは，第1分配律を選言標準形になるまで適用する．

例題1　$(P \vee \neg Q) \supset (P \wedge \neg (Q \wedge R))$の選言標準形を求めよ．

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &\equiv \neg (P \vee \neg Q) \vee (P \wedge \neg (Q \wedge R)) && (\supset \text{の消去}) \\
&\equiv (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge (\neg Q \vee \neg R)) && (\neg \text{を要素式の前に}) \\
&\equiv (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R) && (\text{第1分配律の適用})
\end{aligned}
$$

2) 連言標準形のつくり方　i), ii)は選言標準形の場合と同じ．

iii) i), ii)によって連言標準形にならないときは，第2分配律を連言標準形になるまで適用する．

さて上の手順に従って与えられた論理式を標準形に変形すると，とくに連言標準形にした場合，その連言で結合される部分(連言肢)のすべてに$P_i \vee \neg P_i$(ただしiは各連言肢ごとに異なっていてもよい)が見出されれば，与式がトートロジーであることは容易に指適できてくる．また選言標準形にした場合，その選言で結合されている部分(選言肢)のすべてに$P_i \wedge \neg P_i$(ただしiは各選言肢ごとに異なっていてもよい)が見出されれば，与式が矛盾式であることは容易に指摘できてくる．なお現実問題としては，選言標準形であれ，連言標準形であれ，上記した変形法と合せて，さらに$(A \wedge 1) \equiv A$，$(A \wedge 0) \equiv 0$，$(A \vee 1) \equiv 1$, $(A \vee 0) \equiv A$，吸収律，二重否定などのトートロジーを使ってできるだけ簡単にしながら式変形を行なうのが定石である．

例題2　$((P \supset Q) \wedge (R \vee \neg Q) \wedge \neg (P \wedge R)) \supset \neg P$の連言標準形を求め，トートロジーか否かを判定せよ．

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &\equiv \neg ((\neg P \vee Q) \wedge (R \vee \neg Q) \wedge \neg (P \wedge R)) \vee \neg P && (\supset \text{の消去}) \\
&\equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg R \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vee \neg P && (\neg \text{を要素式の前に}) \\
&\equiv ((P \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee ((P \vee \neg P) \\
&\qquad \wedge (R \vee \neg P)) && (\text{第2の分配律の適用}) \\
&\equiv ((P \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q)) \vee (R \vee \neg P) && (\text{簡単化}) \\
&\equiv (P \vee \neg R \vee R \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee R \vee \neg P) \wedge (P \vee Q \vee R \vee \neg P) \\
&\qquad (\text{第2分配律の適用})
\end{aligned}
$$

さて得られた連合標準形の連言肢にはすべて$P_i \vee \neg P_i$が見出される．よって与式はトートロジーである．

主-選言標準形 ところで標準形のなかには，さらに，「主-選言標準形」(principal disjunctive normal form)と呼ばれる形もある．これは§1.2の補遺として取り上げた論理式の展開と関係がある．すなわちその議論によると，任意の論理式 $A[X_1, \cdots, X_n]$ (この記号で $X_1, \cdots, X_n$ を要素式とする理論式を表わすことにする)は，

$$\bigvee_{i=1}^{2^n}(\tilde{e}_{i1}(X_1) \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_{in}(X_n) \wedge A[e_{i1}, \cdots, e_{in}]) \qquad (*)$$

と表わされるが，この(*)から(*)に現われる $A[e_{i1}, \cdots, e_{in}]$ の部分を除去した式が，$A[X_1, \cdots, X_n]$ の主-選言標準形なのである．実際こうした除去が可能なことは，$A[e_{i1}, \cdots, e_{in}]$ は1または0であり，しかも $(1 \wedge B) \equiv B$, $(0 \wedge B) \equiv 0$, および $(0 \vee C) \equiv C$ が成立することから明らかである．とにかく主-選言標準形は，選言肢の各々に，その論理式に登場する要素式のすべてが，¬がそれにつくか否かは別として，現われているような選言標準形であるといえるのである．

ではどのようにしてつくるか．1つの方法は式の展開を介して求めることもできるが，このためには結局，与式の真理値表をつくらねばならない．もう1つの方法は，与式の選言標準形をまず求め，その上でその各選言肢について，もしそこに出現していない要素式 P_j があれば，その選言肢に $P_j \vee \neg P_j$ を加えることによって求める，という方法である．これは $X \wedge (P_j \vee \neg P_j) \equiv X$ であることから明らかであろう．

例題3 $(P \vee \neg Q) \supset (Q \wedge \neg R)$ の主-選言標準形を求めよ．

$$\text{与式} \equiv \underbrace{(\neg P \wedge Q)}_{R\text{が現われていない}} \vee \underbrace{(Q \wedge \neg R)}_{P\text{が現われていない}} \qquad \text{(選言標準形)}$$

$$\equiv ((\neg P \wedge Q) \wedge (R \vee \neg R)) \vee ((P \vee \neg P) \wedge (Q \wedge \neg R))$$

$$\equiv (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R)$$

(第1分配律を適用)

なお同様にして「主-連言標準形」(principal conjunctive normal form)を定義し，また第2の方法と同様の方法で(i.e. $X \vee (P_j \wedge \neg P_j) \equiv X$ を使って)つくることができることも明らかであろう．

問 1) $(P \vee \neg Q) \supset (P \wedge (Q \vee R))$ の連言標準形を求めよ． 2) $((R \supset (P \vee Q)) \wedge (\neg S \supset \neg P) \wedge (Q \supset \neg S)) \supset \neg R$ の選言標準形と主-選言標準形を求めよ．

第2章　述語論理

述語論理は，文がさらに単語からできているという点に注目し，その上で推論ということを考察していく．そこでまず§2.1では，文中での語の結合を記号化し，述語論理の論理式というものを導入する．なおその際，唯1個のものが対応してくる語と集合が対応してくる語とを明確に区別していくという，特徴ある見方が採用される．§2.2では，論理式を構成する諸記号への意味づけ(解釈)と，論理式の真偽との関係を調べる．その結果，論理式の中には，その記号へのいかなる意味づけに対してもつねに真となる式(妥当式)が存在することを示す．§2.3では，述語論理の立場から正しい推論とは何かを問題にする．そしてそれが妥当式と対応するものであることを示す．またこの原理に立って，どのように正しい推論を進めるかをも明らかにする．§2.4では，§2.3で提示された推論法を，具体例を使って展開する．

§2.1　論理式

命題論理の論理式は文と文との結合などを記号化したものであった．それに対し「述語論理」(predicate logic)の論理式は，文がさらに語と語との結合したものであることから，そうした語と語との結合関係に注目し，それを記号化したものである．しかし語と語との結合関係といっても，文法に登場する見方をはじめ，種々の見方が可能である．では，述語論理ではどのような見方を採用し，また具体的にどのように記号化を進めるのであろうか．そこでまずは簡単な日常文の記号化を通して，この点をながめることから始めよう．

文の記号化—その1—

例1　モーツァルトは天才である．

この文は単文であり，命題論理では単にPと記号化されるにすぎない．しかし述語論理では，「モーツァルト」と「天才」という2つの語の主語－述語的な結合が注目される．そして主語「モーツァルト」を小文字のa，述語「天才」を大文字のPで表わし，その上で両者の関係をPaと記号化する．すなわち述語を先に記し，主語をその右側に添えるようにする．

例2　ジョンはヨーコを愛している．

この文は文法的には，主語「ジョン」と目的語「ヨーコ」が他動詞「愛する」によって結ばれている，と理解される．しかし述語論理ではこの文を，「ジョン」「ヨーコ」ともに主語とみなし，その上でこれら両者の間に一方が他方を「愛する」という関係(述語)が成立している，として捉える．そこで「ジョン」「ヨーコ」の各々をa, bで表わし，「愛する」をPで表わすことによって，文全体はPabと記号化される．したがってこの例からも分かるように，文法上の主語と論理での主語とは必ずしも一致しない．そしてこの点は次の例によってさらにはっきりしてくる．

例3　コアラは有袋類である．

この文は，文型としては例1と類似しており，「コアラ」をa，「有袋類」をPとして，Paと記号化したくなる．しかし述語論理ではそれは大きな誤りとなる．というのも，例3の主語「コアラ」は，例1の主語「モーツァルト」が固有名詞(名前)であるのに対して，普通名詞であり，述語論理ではそれは主語ではなく述語と理解されるからである．すなわち，記号化に当っての述語論理の立場をここではっきり述べておくと，述語論理では，固有名詞(名前)のように唯1個のもの(以下，個体という)を指示する語が主語とみなされるとともに，普通名詞をはじめとして，動詞，形容詞など，個体的なものの集合を指示する語が述語とみなされてくるのである．そして述語論理での文の記号化は，こうした2つのタイプの語を区別し，主語には小文字の記号を，述語には大文字の記号を当てながら，それらの文中での結合関係を表わしていくのである．

そこで例3を記号化するためには，例3をまず次のように言いかえてみることが必要となる．

もしあるものがコアラであるなら，そのあるものは有袋類である．　(#)

すなわち(#)は単文だった例文が2つの文からなる形となった言いかえであ

る．しかもその各々に対しては，例 1 での記号化の仕方が適用できるようになった言いかえである．さらに「あるもの」という不定の個体を指示する表現を主語として新たに導入することによって，「コアラ」がそれに対する述語であることをはっきり示している言いかえでもある．そこでこの技巧的な主語「あるもの」を x で表わし，「コアラ」「有袋類」という述語を各々 P, Q で表わすと，(#)は $Px \supset Qx$ と記号化される．しかしこれで例 3 の記号化は完成したのではない．というのは，(#)が例 3 と全く同じ内容になるためには，(#)に現われる「あるもの」が，文字通りどのようなものでもよい，ということを，(#)にはっきりと書き添える必要があるからである．すなわち例 3 の言いかえは，次の(##)のようにすべきである．

すべてのあるものについて，そのあるものがコアラであるなら，そのあるものは有袋類である． (##)

そこであとは，(##)の「すべてのあるものについて」というところを，$\forall x$ という記号で表わすことにして，結局例 3 は，$\forall x(Px \supset Qx)$ と記号化されるのである．

例 4 ある学生はクリスチャンである．

この文の主語「学生」も普通名詞であり，したがって論理的には述語であり，その記号化に当っては次の(#)のような言いかえが必要となる．

少なくとも 1 つのあるものが存在して，そのあるものは学生であり，しかもそのあるものはクリスチャンである． (#)

すなわちこの場合も，「あるもの」という表現を導入することによって，「学生」が述語であることがはっきりしてくる．ただ例 4 の場合は，すべての学生ではなく，何人かの学生が問題となっていることから，この点を表わすために，「少なくとも 1 つのあるものが存在して」という限定となる．そこでこの限定を $\exists x$ で表わし，「学生」「クリスチャン」を各々 P, Q で表わすと，(#)は，すなわち例 4 は，$\exists x(Px \wedge Qx)$ と記号化される．

以上 4 つの例は日常文の記号化にとってとくに基本となるものである．確かに以下に続く例も基本的であるが，結局はこれらの特殊な場合あるいはこれらを組み合せた場合といえる．

例 5 ブラックホールは存在する．

この文の主語「ブラックホール」は集合が対応してくる語といえ，論理的には述語であり，それは大文字の記号 P で表わされる．しかしこの例文の特色は，むしろ述語「存在する」の方にある．というのは，「存在する」「ある」「いる」などの存在を表わす動詞は，確かに論理的に見ても述語といえるが，それらの記号化に当っては，それらを大文字の記号 Q などで表わすことは，決してしないからである．それらについては，例4に登場した限定表現を次のように上手に使う．

少なくとも1つのあるものが存在して，そのあるものはブラックホールである．

したがって例5は，$\exists xPx$ と記号化される．

例6　明朗で優しい青年はみな好かれる．

この例文は明らかに例3と同じ型をしている．そこで「明朗で優しい青年」という主部を仮に A と表わし，「好かれる」を S で表わすと，まずは $\forall x((Ax)\supset Sx)$ となる．問題は，A と仮に表わした部分が，さらに「明朗な」「優しい」「青年」という各々 P, Q, R で表わされ，論理的に述語とみなされる3つの語からできており，これをどう記号化するか，というところにある．すなわち「明朗な」と「優しい」という2つの形容詞が普通名詞「青年」を修飾するという結合関係の記号化である．しかしこれは少しも難しくない．「x は明朗で優しい青年である」は，連言を使って「x は明朗であり，かつ x は優しく，かつ x は青年である」といえることから，Ax の代わりに $Px\wedge Qx\wedge Rx$ を考えればよいことがすぐ分かる．結局例6は，$\forall x((Px\wedge Qx\wedge Rx)\supset Sx)$ と記号化されるのである．

例7　ケインズを尊敬しない経済学者がいる．

この例文はいままでの例文から知られる記号化の総合問題である．まず普通名詞「経済学者」を P で表わし，それを修飾している「ケインズを尊敬しない」という部分を仮に A で表わすと，述語の「いる」は例5から $\exists$ を使えばよいことから，$\exists x(Ax\wedge Px)$ となることが分かる．また固有名詞「ケインズ」を a, 他動詞「尊敬する」を Q で表わせば，Ax の部分，すなわち「x は a を尊敬しない」は，例2に従って $\neg Qxa$ となることも明らかである．よって例7は，$\exists x(\neg Qxa\wedge Px)$ と記号化される．

例 8 若者はすべて音楽に引きつけられる.

「若者」を P, 述部の「音楽に引きつけられる」を仮に A で表わすと，この例文が基本的には例3と同じ型をしていることから，まずは $\forall x(Px \supset Ax)$ と書ける. 問題は Ax のところである. しかしここも能動態の文「音楽は x を引きつける」に書きかえると，容易に記号化できる. すなわちその主語である「音楽」が論理的には述語であることから，この部分も例3の型をしているといえるからである. そこで「音楽」を Q, 他動詞「○は△を引きつける」を R○△で表わし，さらに x の表わす「あるもの」とは異なる別の「あるもの」を y で表わすと，Ax はいまや $\forall y(Qy \supset Ryx)$ となる. したがって例8全体は，$\forall x(Px \supset \forall y(Qy \supset Ryx))$ と記号化される. とにかくこの例文の記号化では，x と並んで y が現われ，またそれに応じて $\forall x$ とともに $\forall y$ が現われるなど，例7までには見られなかった特徴をもつ. また同時に，この例文は，例2で見られる固有名詞 a, b で表わされるものの間の関係 P を述べる文ではなく，普通名詞 P, Q で表わされるものの間のある関係 R を述べている文であり，非常にしばしば現われる文型といえる. その意味でも大切な例である.

問 次の文を記号化せよ. 1) 火星には生物は住んでいない. 2) すべての少年には好きな少女がいる. 3) たばこを吸う医者がいる.

記号の整理と論理式の定義

述語論理ではどのように語と語との結合を捉え記号化するのかを，簡単な日常文の例を通して見てきた. 以下では，そこに登場してきた種々の記号を整理し，それらに名称を与えるとともに，改めてそれらの記号から構成される論理式というものを定義しておく.

述語論理に現われる記号 1)「述語記号」(predicate symbol) : $P_1^1, P_2^1, P_3^1, \cdots, P_1^2, P_2^2, \cdots, P_i^n, \cdots$.

ただし P_i^n の n は n 個の主語すなわち項(後出)を伴う述語であることを，i はその i 番目であることを表わす. なお，n 個の項を伴う述語は，n-項述語または n-項関係と呼ばれる.

注意 ここに示した述語記号の記号法は正式なものである. しかし後の3章，4章で一般論を展開する場合などを除いたたいていの場合は，上の日常文の記号化でもそうで

あったように，簡単に$P, Q, R, \cdots$を述語記号として用いることにする．またP_i^nのnを略した$P_1, P_2, \cdots, P_i, \cdots$を用いることもある．

2)「個体記号」(individual symbol)

{「個体常項」(individual constant)：$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_i, \cdots$.
{「個体変項」(individual variable)：$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_i, \cdots$.

3)「関数記号」(function symbol)：$f_1^1, f_2^1, f_3^1, \cdots, f_1^2, f_2^2, \cdots, f_i^n, \cdots$.

ただしf_i^nのnはn個の主語すなわち項(後出)が伴う関数であることを，iはそのi番目であることを表わす．なお，n個の項を伴う関数はn-項関数またはn-変数関数と呼ばれることがある．

注意　述語記号についての注意と同様のことがいえる．すなわち実際には，個体常項としては，$a, b, c, \cdots$を，個体変項としては$x, y, z, \cdots$を，また関数記号としては$f, g, h, \cdots$あるいは$f_1, f_2, \cdots, f_i, \cdots$を用いることにする．

4)「限量記号」(quantifier)

{「全称記号」(universal quantifier)：$\forall$.
{「存在記号」(existential quantifier)：$\exists$.

5)「結合子」(connectives)など：$\wedge, \vee, \supset, \neg$；(,), ,.

項の定義　上に見た日常文の記号化の例には現われなかったが，関数記号を使って個体が表わされることがある．そこでその場合を含めて一般に個体を表わす記号を「項」(term)といい，次のように定義する．

1) 個体常項a_iは項である．

2) 個体変項x_iは項である．

3) $t_1, \cdots, t_n$を項とすると，$f_i^n(t_1, \cdots, t_n)$は項である．

4) 1)～3)によって項とされるもののみが項である．

要素式の定義　この節の冒頭でも述べたように，大雑把にいえば文を記号化したものが論理式である．しかしそれを正式に定義する場合には，それに先立って，最も簡単な論理式ともいえる「要素式」(elementary formula)の定義が必要となる．

P_i^nを述語記号とし，$t_1, \cdots, t_n$を各々項とするとき，$P_i^n t_1 \cdots t_n$を要素式という．

例　Pa, Qab, Rax, Qxyなど．

論理式の定義 「論理式」(well formed formula, 略して wff)は次のように定義される.

1) 要素式は論理式である.

2) A, B を論理式とすると，$(A)\wedge(B)$, $(A)\vee(B)$, $(A)\supset(B)$, $\neg(A)$, $\forall x_i(Ax_i)$, $\exists x_i(Ax_i)$ の各々は論理式である.

ただし( )内が要素式または一番外側に¬や∀や∃を伴った式である場合は，( )を省略した形態を論理式と考える(なお，A, B によって，そこに変項が現われている場合も表わしているが，とくに変項 x_i が現われていることを明示しておきたい場合には，Ax_i として A の右側に x_i を記しておく).

3) 1), 2)によって論理式とされるもののみが論理式である.

注意　先に見た日常文の記号化の結果得られたものが，上の定義から見ても論理式となっていることは明らかであろう．しかしまたこの定義に従えば，$Px\wedge Qx$, $\forall x(Px\supset(Qy\wedge\neg Rxy))$ など，対応する限量記号をもたない変項を含む式も当然論理式とされる点，注意を要する.

論理式に関連した用語

今後しばしば使用する論理式に関連した用語に触れておこう.

1) 自由変項と束縛変項　まず論理式中の変項は，その現われ方の違いから，通常2つに分けられる．1つは，対応する限量記号をもたないような変項であり，それを「自由変項」(free variable)という．他の1つは，対応する限量記号をもつ変項であり，それを「束縛変項」(bound variable)という.

2) 開いた式と閉じた式　上の変項の区別をふまえて，論理式も大きく2つに分けることができる．1つは，少なくとも1つの自由変項を含む式であり，それを「開いた式」あるいは「開式」(open formula)という．他の1つは，自由変項を全く含まない式であり，それを「閉じた式」あるいは「閉式」(closed formula)という.

例　i) $\forall x(Px\supset(Qy\supset Rxy))$ の中の x は束縛変項，y は自由変項である．よってこの式は開いた式である.

ii) $\forall x(Px\supset\exists y(Qy\wedge\neg Rxy))$ の中の x, y は，ともに束縛変項であり，この式は閉じた式である.

iii) $Pa \wedge Qab$ は，そこに変項が現われていないゆえ，閉じた式である．

3) 限量記号の作用域　限量記号の作用する範囲は，たいていの場合，自明的であるが，念のため「作用域」(scope) としてはっきりさせておく．すなわち限量記号 $\forall x_i$ (または $\exists x_i$) の作用域とは，限量記号に続く（　）内に自由変項として現われている x_i である．ただし，ここで（　）内というときの（　）については，論理式の定義の但し書きによって省略される以前のものとする．

例　$\underset{(イ)}{Px} \wedge \forall x((\exists x Q\underset{(ロ)}{x} \wedge R\underset{(ハ)}{x}) \supset \neg S\underset{(ニ)}{x})$

$\forall x$ は(ハ)，(ニ)の x に作用するが(ロ)，(イ)の x には作用しない．$\exists x$ は(ロ)のみに作用する．

4) Ax の x に対して自由である　ある論理式の自由変項にある項を代入する際，不用意に代入すると，項の中の自由変項が思わぬ限量記号の作用を受けて束縛変項になってしまうことがある．この点に関して，「項 t は Ax の x に対して自由である」(t is free for x in Ax)，ということを次のように定義しておく．

i) Ax_i の x_i のところに x_j を代入しても，x_j が自由変項のままであるとき，x_j は Ax_i の x_i に対して自由である，という．

ii) Ax_i の x_i のところに t を代入しても，t に含まれている自由変項が自由変項のままであるとき，t は Ax_i の x_i に対して自由である，という．

例　Ax として $\forall yPx$ を考える．そして x に y を代入してみる．すると $\forall yPy$ となり，y は束縛変項となってしまう．したがってこの場合は，y は $\forall yPx$ の x に対して自由ではない，ということになる．

文の記号化—その2—

先に述べた文の記号化では，日常的な文の記号化が中心であったので，ここでは数学的な命題の記号化を少し例示しておく．

例1　自然数に最大数は存在しない．

「自然数である」を P とし，「最大数である」を Q として，$\neg\exists x(Px \wedge Qx)$ と記号化することもできる．しかしこれは余りに表面的な記号化である．この例文の場合には，自然数にとってより基本的な述語である大小関係 (i.e. ○≦△) を R○△ とすることによって，その記号化を考えるべきである．というのも，Qx

(i.e. x は最大数である)は，$\forall y(Py\supset Ryx)$ (i.e. x は他のいかなる自然数より大きい)として表わされるからである．そこでこの例文は，$\neg\exists x(Px\wedge\forall y(Py\supset Ryx))$ と記号化されるべきといえよう．なお数学的な命題では，変項 x, y の変域が予め了解済みのことが多く，その場合は，より簡単に $\neg\exists x\forall yRyx$ あるいは R の代りに通常の記号≦を使って $\neg\exists x\forall y(y\leq x)$ と表わされる．

例 2　5は素数である．

これも，「素数である」を P とし，「5」を a として，Pa と記号化したのでは，それは余りに表面的である．「素数である」は，自然数にとってより基本的である述語＝，関数×，常項1を使って表わされるからである．すなわち「a は素数である」は次のように表わされる(なお以下での x, y はその変域を自然数としているものとする)．

　a は1ではなく，しかも $x=1$ または $x=a$ であるときのみ(only if)，a は x で割り切れる．　(♯)

そしてまた，「a は x で割り切れる」はさらに次のように表わされる．

　ある y が少なくとも1つ存在して，$x\times y=a$．　(♯♯)

そこで(♯)，(♯♯)を合わせ，例文全体としては，$\neg(a=1)\wedge\forall x(\exists y(x\times y=a)\supset(x=1\vee x=a))$ と記号化されるのである．

注意　「A であるときのみ(only if)，B である」は，「A であるとき，B である」の逆の表現であり，$B\supset A$ と記号化される．

例 3　数列 $\{a_n\}$ の極限は a である(i.e. $\lim_{n\to\infty} a_n=a$)．

数列 $\{a_n\}$ の極限が a であるということは，n(自然数)を限りなく大きくしたとき，a_n が限りなく a に近づく，ということである．しかし数学ではもう少し明確に次のように述べられる．

　任意の正の実数 ε に対して，ある適当な自然数 m が存在して，$n>m$ なるすべての n に対して $|a_n-a|<\varepsilon$ となる．　(♯)

そこで(♯)を論理記号を使って記号化すると，すなわち例文の記号化は，$\forall\varepsilon\exists m\forall n(n>m\supset|a_n-a|<\varepsilon)$ となる．ただし ε は正の実数を変域とし，n, m は自然数を変域とする変項としている．

問　次の文を記号化せよ．1) どんな自然数にもそれより大きな自然数が存在する．2) a の近くで定義されている関数 $f(x)$ の極限は b である(i.e. 任意の正の実数 ε に対し

て，適当な正の実数 δ が存在して，$0<|x-a|<\delta$ なるすべての x に対して，$|f(x)-b|<\varepsilon$ である)．

§2.2　解釈と妥当式

論理式の解釈

前節では，ある文が与えられたとき，その文における述語論理が注目する語と語との結合関係を，論理式として記号化し，それをそれなりに明確にすることができた．とはいえ，論理式としてただ記号化しただけでは，その結合がどんな特徴をもつ結合であるのか，といった議論をさらに十分に進めていくことはできない．そこでこの節では，命題論理での真理値分析に相当することを考えてみる．すなわち，論理式とみなせるある記号形態が与えられているとき，その式を構成する諸記号の各々に具体的な意味を与え，そのことによってその式に対応する文をつくり，その上でその真偽を考えてみる，ということを行なう．つまり，諸記号への意味づけと，それにもとづいて決まる式の真理値との関係をながめるという仕方で，論理式の特徴を明らかにしようというわけである．

そこでまず，論理式を構成する諸記号のうち，述語記号，関数記号，個体常項，個体変項への意味づけを，「解釈」(interpretation) と呼び (以下 I で表わす)，その手順を次のように定める．

1) 解釈の「領域」(domain) と呼ばれる空でない 1 つの集合 (以下 D で表わす) を決める．なお D をどのような集合にするかは任意である．すなわちたとえば D を人間の集合としても，また自然数の集合などとしてもよい．

2) 述語記号 P_i に対しては，1) で決めた D で有意味となる述語を任意に選んで対応させる．ただし D で有意味な述語とは，D の要素をその述語の主語としたとき生ずる文について，その成立・不成立が問題にし得るような述語のことである．たとえば D を人間の集合とした場合，「医者である」は D で有意味であるが，「素数である」は D で有意味とはいえない．

3) 関数記号 f_i に対しては，1) で決めた D の要素から D の要素への対応を与える関数を任意に選んで対応させる．D を自然数の集合とした場合，たとえば

$f_1(a_1, a_2)$の f_1 には，自然数上の加法 ＋ とか，乗法 × などを対応させる．

4）個体常項 a_i に対しては，1）で決めたDの要素を任意に選び，その名前を対応させる．Dを人間の集合とした場合，たとえば a_1 に対しては「ジョン」を，a_2 に対しては「ヨーコ」を，というように対応させる．

5）自由変項 x_i に対しては，1）で決めたDの要素を任意に選び，その名前を対応させる．すなわち自由変項についても，個体常項と同様に取り扱う．

以上が解釈Iということである．つまりIは，領域Dを与えることと，そのDによって制限されながら諸記号の各々へ具体的な意味を対応づけること(以下この対応づけをVで表わす)，からなっている．したがって $\mathrm{I}=\langle \mathrm{D}, \mathrm{V}\rangle$ と表わすことができる．と同時にこのように解釈Iが定められると，要素式(あるいは論理式の中の要素式の部分)については，容易にその真偽を問題にすることが可能となる．すなわち解釈Iと要素式 $P_it_1\cdots t_n$ の真理値との関係を，「Iのもとで $P_it_1\cdots t_n$ は真である」(以下これを $\mathrm{I}\models P_it_1\cdots t_n$ で表わす)というかたちで，次のように定義するのである．

定義　$\mathrm{I}\models P_it_1\cdots t_n \underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} \mathrm{V}[P_i]\mathrm{V}[t_1]\cdots\mathrm{V}[t_n]$ はDで成立する．

ただし $\mathrm{V}[P_i]$ は P_i にVによって対応させられたDでの述語であり，$\mathrm{V}[t_j]$ $(1\leq j\leq n)$ は t_j にVによって対応させられたDの要素の名前である．よって $\mathrm{V}[P_i]\mathrm{V}[t_1]\cdots\mathrm{V}[t_n]$ はDで成立・不成立が問題にし得る文である．

さて次にそれでは，結合子，限量記号(したがって束縛変項)などを含む一般の論理式 A については，どのようにすればその真偽を問題にできるであろうか．すなわちどのようにすれば，「Iのもとで論理式 A は真である」(以下これを $\mathrm{I}\models A$ と表わす)を定義できるであろうか．しかしそれは，これらの論理記号の各々について，それらを含む式がIのもとで真となることを，それらの通常の意味をふまえて，次のように定義することによって可能となる．

定義　1）$A{:}B\wedge C$ のとき．$\mathrm{I}\models B\wedge C$ (i.e. $\mathrm{I}\models A$) $\underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{I}\models B$ かつ $\mathrm{I}\models C$．

2）$A{:}B\vee C$ のとき．$\mathrm{I}\models B\vee C$ (i.e. $\mathrm{I}\models A$) $\underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{I}\models B$ または $\mathrm{I}\models C$．

3）$A{:}B\supset C$ のとき．$\mathrm{I}\models B\supset C$ (i.e. $\mathrm{I}\models A$) $\underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{I}\models B$ ならば $\mathrm{I}\models C$．

4）$A{:}\neg B$ のとき．$\mathrm{I}\models \neg B$ (i.e. $\mathrm{I}\models A$) $\underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{I}\models B$ ではない．

5）$A{:}\forall x_iBx_i$ のとき．$\mathrm{I}\models \forall x_iBx_i$ (i.e. $\mathrm{I}\models A$) $\underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}$ すべての I' について，$\mathrm{I}'\models Bx_i$．ただし I' は，Iと異なったとしても，高々自由変項 x_i へのDの要素の名

前の対応づけのところのみで，その他ではIと全く同じであるような解釈を表わしている．

6) $A:\exists x_i Bx_i$ のとき． $\mathrm{I}\models\exists x_i Bx_i$ (i.e. $\mathrm{I}\models A$) $\underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}$ 少なくとも1つの I' が存在して，$\mathrm{I}'\models Bx_i$． ただし I' は，5)で述べたものと同じである．

解釈の例と説明

上の諸定義を身近なものにするために，簡単な例を2つほど記しておく．

例1 $\exists x(Px\wedge Qx)$ について． 1)与式に対して，D:人間，V[P]: 日本人である，V[Q]: ノーベル賞受賞者である，V[x]: 鈴木，とするD, Vからなる解釈 I_1 を与えてみよう．するとこの I_1 によって与式の各部分は，次のようになる．まず「鈴木は日本人である」(i.e. V[P]V[x])は成立するゆえ，$\mathrm{I}_1\models Px$…(1)であり，「鈴木はノーベル賞受賞者である」(i.e. V[Q]V[x])は不成立ゆえ，$\mathrm{I}_1\not\models Qx$…(2)である (ただし $\not\models$ は $\models$ の否定を表わす)． よって(1)，(2)と $\mathrm{I}\models A$ の定義により，$\mathrm{I}_1\not\models Px\wedge Qx$ でもある．では与式自体はどうなるか．そのために，I_1 と高々 V[x]を異にする I_1' の1つとして，D, V[P], V[Q]は I_1 と全く同じとし，V[x]: 湯川，とする解釈 I_{11} を考えてみる．するとこの I_{11} に対しては，「湯川は日本人である」(i.e. V[P]V[x])，「湯川はノーベル賞受賞者である」(i.e .V[Q]V[x])ともに成立するゆえ，$\mathrm{I}_{11}\models Px$ でありしかも $\mathrm{I}_{11}\models Qx$ である．よって $\mathrm{I}_{11}\models Px\wedge Qx$ である．すなわち，少なくとも1つの I_1' が存在して，$\mathrm{I}_1'\models Px\wedge Qx$ である，といえる．よって $\mathrm{I}\models A$ の定義6)により，結局 $\mathrm{I}_1\models\exists x(Px\wedge Qx)$ となる．つまり I_1 という解釈のもとで与式は真となるのである．

2) 次に，D: 自然数，V[P]: 奇数である，V[Q]: 偶数である，V[x]: 6，とするD, Vからなる解釈 I_2 を，与式に対して与えてみよう．するとまずこの I_2 に対して，$\mathrm{I}_2\not\models Px$，$\mathrm{I}_2\models Qx$ となること，よって $\mathrm{I}_2\not\models Px\wedge Qx$ となることは明らかであろう．次に与式自体を考える．そこで I_2 と高々 V[x]を異にする I_2' で，しかも $\mathrm{I}_2'\models Px\wedge Qx$ となる I_2' を探してみる．しかし明らかにこのような I_2' は全く存在しない．すなわち，すべての I_2' について，$\mathrm{I}_2'\not\models Px\wedge Qx$ である．よって $\mathrm{I}\models A$ の定義6)により，結局 $\mathrm{I}_2\not\models\exists x(Px\wedge Qx)$ となり，したがって I_2 という解釈のもとでは与式は偽となるのである．

注意 i) D, Vの決め方は任意ゆえ，1つの式には無限に多くの解釈を与えることが

可能である． ii) 上例からも分かるように，論理式の真理値は，一般に解釈の与え方によって変り得る．

例 2 $Py \supset \exists x Px$ について． 1) D: 人間，V[P]: 超能力者である，V[x]: 木村，V[y]: 鈴木，とする D, V からなる解釈 I_1 を与えてみる(なお，仮に鈴木は本当に超能力者としておく)．すると，⊃の前件部分 Py については，明らかに $I_1 \vDash Py$ である…(1)．一方，⊃の後件部分については，V[x]: 鈴木，とし，他は I_1 と全く同じにした解釈 I_{11} を考えると，明らかに $I_{11} \vDash Px$ であり，しかも I_{11} は I_1 と高々 V[x]を異にする解釈 I_1' の 1 つでもあることから，少なくとも 1 つの I_1' が存在して，$I_1' \vDash Px$ であるといえ，結局 $I_1 \vDash \exists x Px$ となる…(2)．よって(1)，(2)と $I \vDash A$ の定義 3) より，$I_1 \vDash Py \supset \exists x Px$ となる．

2) 次に上の解釈において，鈴木が実際には超能力者でない場合を見ておく．このとき，⊃の前件は明らかに $I_1 \nvDash Py$ である．するとこの場合には，⊃の前件がこの I のもとで偽ゆえ，後件の $\exists x Px$ について $I_1 \vDash \exists x Px$ か否かをもはや調べるまでもなく，⊃の定義により，$I_1 \vDash Py \supset \exists x Px$ といえる．

3) 上の 1), 2) を注意して見ると，与式はどんな解釈 I のもとでも真である，すなわち与式を偽とする解釈 I は存在しない，ということが容易に予想がつく．そこでこの点を確認しておこう．そのために与式を偽とする I が存在すると仮定する(背理法)．すると⊃の定義より，この I については $I \vDash Py$…(1) かつ $I \nvDash \exists x Px$…(2)でなければならない．すると(2)から，すべての I′ について，$I' \nvDash Px$ がいえる．すなわち D のどんな要素の名前を V[x] としても V[P]V[x] は成立しない．しかし一方(1)より，V[P]V[y] であり，しかも V[y] はもとより D のある要素の名前である．よって矛盾が生じてしまう．

説明 ところで上に見た帰納的な仕方での $I \vDash A$ の定義は，必ずしも分かりやすいとはいえない．とくに限量記号の部分など，なぜそのように定義するのか，その理由が分かりにくい．実際，新たに次のような解釈 I を導入し，その上で式の真理値を考える方が，はるかに簡単で分かりやすいように思われる．すなわち今度の $I = \langle D, V \rangle$ では，その V を，種々の記号への意味づけに加えて，限量記号やそれに対応する束縛変項に対しても，次の i) ~iii) のように意味づけるものとする． i) V[$\forall x$]: D に属するすべてのあるものについて， ii) V[$\exists x$]: D に属する少なくとも 1 つのあるものが存在して， iii) V[x] (ただし x は束縛

変項)：Dに属するあるもの，というように．たとえば，D: 自然数，V[P]：素数である，V[Q]：偶数である，とすると，$\exists x(Px \wedge Qx)$には，直ちに「少なくとも1つのある自然数が存在して，そのある自然数は素数であり，そしてそのある自然数は偶数である」(♯)なる文が対応してくる．するとこの単文の内容から容易に，この式はこのIのもとでは真である，といえるようになる．

では，なぜこのような解釈Iを採用しないのであろうか．理由は∧,∨,⊃,￢を命題論理と同様にあくまでも真理関数として捉えようとするところにある．というのは，上の簡単な解釈Iに従って$\exists x(Px \wedge Qx)$に(♯)を対応づけた場合，式中の∧に対応する(♯)中の「そして」は，真理関数としての「そして」とは決して考えられないからである．すなわち「そして」によって結合される「そのある自然数は素数である」と「そのある自然数は偶数である」は，両者とも不定的な表現が主語の位置にあり，真理値の定まった命題とはいえないからである．そして同様のことは，簡単な解釈Iを採用した場合明らかに，限量記号の作用域内に現われる結合子一般にいえる．したがって∧,∨,⊃,￢の結合子を真理関数として明確にその意味を考えようとする立場を貫くためには，たとえ簡単で分かりやすくとも，新たな解釈Iの方を採用することはできないのである．

と同時に以上から分かることは，∧,∨,⊃,￢を述語論理でも真理関数として捉えていくためには，上の例でいえば，PxやQxなどの開いた式の部分にも，真理値をもつ命題が対応するようにする必要がある，ということである．そしてそのためには，Iによって，PxやQxのxに具体的な名前を指定するより他はない．つまりxが担っている不定性(任意性)を，意味づけIの方の不定性(任意性)に移すように捉えるのである．またそれとともに，限量記号の方も，もはやxに対してではなく，Iに対しての限定詞というかたちで，その意味を生かし捉える，というより他はない．そしてこれらの点を定式化してみるとき，それが必然的に先に見た帰納的な仕方での$\mathrm{I} \vDash A$の定義になることは，明らかであろう．結局くり返していえば，∧,∨,⊃,￢への真理関数的な意味づけの保持が，先の$\mathrm{I} \vDash A$の定義を採用せざるを得ない理由なのである．

論理式の分類と妥当式の例

論理式に解釈を与え，そのもとでその真理値を問題にすることができるようになったいま，命題論理の場合と同様，論理式を大きく3つに分類することが可能になる．すなわちそれらは「妥当式」(valid wff)，「充足可能式」(satisfiable wff)，「矛盾式」(contradictory wff)の3つであり，各々次のように定義される．

定義 1) A は妥当式である $\underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}$ すべての解釈Iのもとで A はつねに真である．（なお A が妥当式であることを，以下，$\vDash A$ と表わすこともある．）

2) A は充足可能式である $\underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}$ 少なくとも1つのある解釈Iのもとで A は真である．

3) A は矛盾式である $\underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}$ すべての解釈Iのもとで A はつねに偽である．

明らかに妥当式は命題論理のトートロジーに相当するものであり，トートロジーが命題論理で重要なものであったと同様，妥当式は述語論理で重要な式となる．そこで次に，予めどのようなものが妥当式となるかを，すなわち妥当式の代表的なものを，以下少しばかり例示しておこう．

1. $\forall x_i Ax_i \supset At$　　ただし t は項であり，また t は Ax_i の x_i に対して自由である．

注意 図式的に記しており，$\forall xPx \supset Pa$, $\forall x(Px \wedge \neg Qx) \supset (Py \wedge \neg Qy)$ などを，上式で総括して表わしている．また図式としても正式には $\forall x_i(Ax_i) \supset (At)$ と記すべきであるが，分かる範囲で括弧は省略してある．以上の2点は，以下の各式についても同様とする．

2. $At \supset \exists x_i Ax_i$　　ただし t は項であり，また t は Ax_i の x_i に対して自由である．

注意 先に記した例2は，この式の特殊な場合になっている．

3. $\neg \forall x_i Ax_i \equiv \exists x_i \neg Ax_i$
4. $\neg \exists x_i Ax_i \equiv \forall x_i \neg Ax_i$

注意 3, 4で表わされる「すべて」と「存在」の関係は，日常語においてもしばしば出会う基本的なものである(not all と any との関係，not any と no との関係などを考えよ)．また3, 4は$\wedge$と$\vee$の間に成立するドゥ・モルガンの法則を拡張したものと見てみることもできる．実際この点は，$\forall xPx \equiv Pa_1 \wedge Pa_2 \wedge Pa_3 \wedge \cdots$, $\exists xPx \equiv Pa_1 \vee Pa_2 \vee Pa_3 \vee \cdots$ と考えることができる場合もあり(i.e. 名前づけが可能なとき)，その場合にはとく

に容易に見てとれる．さらにまた 3, 4 は，その各々の両辺に$\neg$をつけることによって $\forall x_i Ax_i \equiv \neg\exists x_i \neg Ax_i$, $\exists x_i Ax_i \equiv \neg\forall x_i \neg Ax_i$ が得られることから，$\forall$ または $\exists$ の 1 つがあれば，他はそれと$\neg$とによって定義されることを示している．

5. $\forall x_i \forall x_j Ax_i x_j \equiv \forall x_j \forall x_i Ax_i x_j$

6. $\exists x_i \exists x_j Ax_i x_j \equiv \exists x_j \exists x_i Ax_i x_j$

7. $\exists x_i \forall x_j Ax_i x_j \supset \forall x_j \exists x_i Ax_i x_j$

注意 7 の逆 $\forall x_j \exists x_i Ax_i x_j \supset \exists x_i \forall x_j Ax_i x_j$ は，妥当式ではない．実際，$\forall x \exists y Pxy \supset \exists y \forall x Pxy$ に対して，偽となるような解釈 I$(=\langle$D, V$\rangle)$を次のように与えることができる．すなわち D：自然数，V$[P\bigcirc\triangle]$：$\bigcirc \leq \triangle$，とする解釈である．すると前件部分は，「どんな自然数にもそれより大きな自然数が存在する」と理解でき，この解釈 I のもとでは真となる．それに対して後件の部分は，「すべての自然数よりも大きな自然数 (i.e. 最大な自然数) が存在する」と理解でき，この解釈 I のもとでは偽となる．よって少なくともこの I のもとでは与式は偽となる．とにかく異なった種類の限定記号が並んでいるときは，その順序に十分注意する必要がある．

8. $\forall x_i (Ax_i \wedge Bx_i) \equiv (\forall x_i Ax_i \wedge \forall x_i Bx_i)$

9. $\exists x_i (Ax_i \vee Bx_i) \equiv (\exists x_i Ax_i \vee \exists x_i Bx_i)$

10. $(\forall x_i Ax_i \vee \forall x_i Bx_i) \supset \forall x_i (Ax_i \vee Bx_i)$

11. $\exists x_i (Ax_i \wedge Bx_i) \supset (\exists x_i Ax_i \wedge \exists x_i Bx_i)$

注意 10, 11 の逆は，各々妥当式とはならない．

12. $\forall x_i (C \wedge Ax_i) \equiv (C \wedge \forall x_i Ax_i)$

13. $\forall x_i (C \vee Ax_i) \equiv (C \vee \forall x_i Ax_i)$

14. $\exists x_i (C \wedge Ax_i) \equiv (C \wedge \exists x_i Ax_i)$

15. $\exists x_i (C \vee Ax_i) \equiv (C \vee \exists x_i Ax_i)$

ただし 12〜15 の C には，x_i は自由変項として現われていないとする．

注意 12〜15 は 8〜11 と異なり，$\wedge, \vee$に関係なく，左辺と右辺の同値関係が成立する．なおこれらの妥当式は，式の内部の方にある限量記号を式の頭の部分に移す場合の式変形などに使用されることが多い．

16. $\forall x_i (C \supset Ax_i) \equiv (C \supset \forall x_i Ax_i)$

17. $\forall x_i (Ax_i \supset C) \equiv (\exists x_i Ax_i \supset C)$

ただし 16, 17 の C には，x_i は自由変項として現われていないとする．

注意 16 は 1 とともに $\forall$ の最も基本的な性質を表わしている．17 は 2 とともに $\exists$ の最も基本的な性質を表わしている．

以上，妥当式(というよりその図式)の代表的なものを記したが，さらに次のようなものも妥当式となることを注意しておく．すなわちそれは，

18. 命題論理のトートロジーの図式の A, B, C などに，述語論理の論理式を代入して得られる式

である．たとえば $\neg A \vee A$ (排中律)の A を $\forall x(Px \supset \neg Qx)$ とすると，$\neg\forall x(Px \supset \neg Qx) \vee \forall x(Px \supset \neg Qx)$ なる述語論理の式が得られるが，これが妥当式となるのである．

妥当性の証明の例

上に代表的な妥当式を例示したが，各々が妥当であることの証明は，2 の $At \supset \exists x_i Ax_i$ の特殊な場合である $Py \supset \exists xPx$ について，先に解釈の例として示した以外は，まだ与えていない．しかし一般的なかたちで，しかも厳密に妥当性の証明を与えることは少々面倒なところもある(§4.2 参照)．ここでは多少略式ではあるが，参考のため，16 の一部である

$$\forall x_i(C \supset Ax_i) \supset (C \supset \forall x_i Ax_i) \qquad (*)$$

の妥当性と，18 の妥当性を証明しておこう．

(*)の妥当性の証明　(*)を 0 とする解釈が存在すると仮定する(背理法)．そしてその解釈を I としよう．するとまず，$\mathrm{I} \models \forall x_i(C \supset Ax_i)$ …(1)かつ $\mathrm{I} \not\models C \supset \forall x_i Ax_i$ …(2)である．よって(2)から，$\mathrm{I} \models C$ …(3) かつ $\mathrm{I} \not\models \forall x_i Ax_i$ …(4) を得る．ここで(4)は，$\mathrm{I} \models A$ の定義の 5) より，ある I' が存在して $\mathrm{I}' \not\models Ax_i$ である，ということであり，よってそうした I' の 1 つを I_1 とすると，$\mathrm{I}_1 \not\models Ax_i$ …(5) を得る．また(1)より，すべての I' について $\mathrm{I}' \models C \supset Ax_i$ であり，よって $\mathrm{I}' \models C \supset Ax_i$ …(6)を得る．ここで I と I' とは，高々 $\mathrm{V}[x]$ が異なるのみで，しかも C には x_i は自由変項として現われていないことから，(3)より $\mathrm{I}' \models C$ …(7) がいえる．よって(6), (7)より，$\mathrm{I}' \models Ax_i$ …(8)を得る．ところで，(8)は，I と高々 $\mathrm{V}[x]$ を異にする任意の I' について成立するゆえ，先の I_1 についても(8)は成立する．i.e. $\mathrm{I}_1 \models Ax_i$ …(9)である．しかしこれは明らかに(5)と矛盾する． □

18 の妥当性の証明　まず $B_1, \cdots, B_n$ を命題論理の式とし，$B_1, \cdots, B_n$ の命題論理的な結合によってトートロジーとなっている式を，$A[B_1, \cdots, B_n]$ で表わすことにする．すなわち $B_i (1 \leq i \leq n)$ の真偽に関係なく，$A[B_1, \cdots, B_n]$ はつねに

真となっている．ところで，任意の述語論理式の C_i について，$\mathrm{I}\models C_i$ であるかまたは $\mathrm{I}\not\models C_i$ である．よって $A[B_1, \cdots, B_n]$ の B_i の各々に C_i を代入した $A[C_1, \cdots, C_n]$ について，$\mathrm{I}\models A[C_1, \cdots, C_n]$ が成立する．しかも以上のことは任意の解釈 I についていえるゆえ，結局 $A[C_1, \cdots, C_n]$ は妥当式である．　□

注意　i) 他の式の場合も背理法を使って上の(*)の証明と同様にして示せる．また後述する§2.4の例題3のようにして，1, 2, 16, 17, 18 の妥当性を根拠に，その妥当性を証明することもできる．ii) とにかく妥当式の妥当性は証明することができるが，ある式が与えられたとき，それが妥当であるか否かを有限的に判定することは一般にはできない．この点，ある式がトートロジーか否かを必ず判定できる命題論理の場合とは異なる．なお述語論理のこのような性質は，述語論理の「非決定性」(undecidability) と呼ばれることがある．

問　次の式が妥当式であることを示せ．　1) $\forall xPx \supset Py$　　2) $\forall x(Px \supset Qa) \supset (\exists xPx \supset Qa)$

§2.3　推　論—その1—

推論とは

すでに§1.3で述べたように，推論とは，いくつかの命題からなる前提から1つの命題を結論として引き出すことであり，述語論理でもこのことに変りはない．ただこれから問題となる推論は，当然のことながら，語と語との結合が関係する推論が中心となる．実際，次の例1，例2に見られる「三段論法」(syllogism) といわれるごく簡単な推論も，語の結合が関係する推論であることから，命題論理の段階では取り扱えず，述語論理の推論としてはじめて処理できるのである．

例1　すべての人間は生物である．
　　　すべての生物は死ぬ．
　∴　すべての人間は死ぬ．

例2　すべての日本人はアジア人である．
　　　ある日本人はノーベル賞受賞者である．
　∴　あるアジア人はノーベル賞受賞者である．

そこでまず，考察の対象となるこうした推論の記号化を考えよう．しかしこ

れも命題論理と同様に，次のような「推論式」(sequent)で表わされる．

$A_1, \cdots, A_n \to C$　　ただし $A_i(1 \leq i \leq n)$ は前提に現われる命題を表わす述語論理の論理式，C は結論に現われる命題を表わす述語論理の論理式である．

注意　正式には，上の $A_i(1 \leq i \leq n)$, C は述語論理の論理式であればよいので，必ずしも命題に対応したものでなくともよい．すなわちそれらは開いた式でもよい．

したがって例1，例2の推論式を書いてみると，

例1: $\forall x(Px \supset Qx), \forall x(Qx \supset Rx) \to \forall x(Px \supset Rx)$

例2: $\forall x(Px \supset Qx), \exists x(Px \wedge Rx) \to \exists x(Qx \wedge Rx)$

となる．ただし例1では，P: 人間，Q:生物，R: 死ぬ，としており，例2では，P: 日本人，Q: アジア人，R: ノーベル賞受賞者，としている．

正しい推論の条件

さて次に問題になることは，推論の中でもどのような推論が論理的に正しいものであるか，ということであろう．すなわち正しい推論が満たすべき条件が何かを，はっきり示すことである．しかしこれに対する述語論理での解答は，次のように与えられる．

条件 C　$A_1, \cdots A_n \to C$ は正しい $\Leftrightarrow$ $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \supset C$ は妥当式である(i.e. $\models (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \supset C$)．

それではこの条件の根拠はどこに求められるであろうか．しかしそれは，上の条件が命題論理での条件 C_1 に類似していることから，容易に予想できよう．すなわちそれは，命題論理の場合と同様(§1.3参照)，真なるものから真なるものを引き出すことを定式化した「意味論的推論」(ただし述語論理での)の導入と，それを正しい推論とみなしていくところ(要請)に求めることができる．そこで次に，意味論的推論の定義，簡単な補題および要請を記しておく．実際これらの事柄を結びつけるとき，上の条件 C が得られることは直ちに明らかとなる．

定義　$A_1, \cdots, A_n \models C$ が成立する $\underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}$ すべての解釈 I について，$\mathrm{I} \models A_1$ かつ…かつ $\mathrm{I} \models A_n$ ならば $\mathrm{I} \models C$ である．　(なお，$A_1, \cdots, A_n \models C$ は，「$A_1, \cdots, A_n$ から C が意味論的に推論される」と読むことにする．)

注意　$\underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}$ の右辺は，$A_1, \cdots, A_n$ を同時に真とするようなすべての解釈のもとで C も真

であることを表わしており，本質的には命題論理の場合の定義と同じである．

補題 3.1　$A_1, \cdots, A_n \vDash C$ が成立する ⇔ すべての解釈 I について，$\mathrm{I} \vDash (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \supset C$ である (i.e. $\vDash (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \supset C$)．

証明　$\mathrm{I} \vDash A$ の定義(§2.2, p.47)と上の意味論的推論の定義から明らか．　□

要請　$A_1, \cdots, A_n \rightarrow C$ は正しい ⇔ $A_1, \cdots, A_n \vDash C$ が成立する．

正しい推論の進め方

今度は，上に掲げた正しい推論が満たすべき条件をふまえて，一般にどのようにしたら正しい推論を進めることができるのか，あるいは正しい推論と分かっている推論が与えられたとき，その正しさをどのように証明したらよいか，ということを問題にしよう．実際，述語論理ではある推論が与えられたとき，推論の正しさの条件がはっきりしていても，その正誤を判定することは一般にはできない．というのは，正しさの条件によると推論の正誤はそれに対応する式が妥当式か否かで決まるわけであるが，ある式が妥当式であるか否かは，有限的な方法で決定できない場合があるからである．しかしたとえ正誤の判定問題が一般には解けなくとも，正しい推論に対してその正しさを有限的に示すことは可能であり，理論的にも述語論理の完全性(後述第4章)によって保証されている．そこで以下ではまさにこの可能な方の問題を取り上げようというわけである．

では，具体的にはどのように推論を進めたらよいであろうか．ここではすでに第1章§1.3で示した方法に繋がる推論法を採用する．そこでさっそくその推論の書き方(書式)と5つの推論規則を記してみよう．

1) 書式　はじめに前提となる式 $A_1, \cdots A_n$ を縦に並べる．続いてその下に，5つの推論規則のいずれかを用いて導き出される式 $B_1, \cdots B_m$ を次々と並べ，その最後が結論の式になるようにする．すなわち左のようにする．

(1)	A_1
⋮	⋮
(n)	A_n
($n+1$)	B_1
⋮	⋮
($n+i$)	B_i
⋮	⋮
($n+m$)	B_m $(=C)$

ただし A_j $(1 \leq j \leq n)$ は前提の式，B_i $(1 \leq i \leq m)$ は $(n+i-1)$ 以前に現われた式から推論規則によって導き出される式，またはすでに妥当式であることが分かっている式，C (i.e. B_m) は結

論の式である.

2) 5つの推論規則　推論規則は次の UI, UG, EI, EG, P* の5つからなる. なお UIR, UGR, EIR, EGR は, UI, UG, EI, EG の各々に伴う条件である.

UI(全称例化): $\forall x_i A x_i$ から At を導き出すことができる.

UIR: ただし t は項であり, また t は Ax_i の x_i に対して自由であること.

UG(全称汎化): Ax_i から $\forall x_i A x_i$ を導き出すことができる.

UGR 1: ただし x_i は前提の諸式(妥当式は除く)において自由変項として現われていないこと.

UGR 2: ただし x_i は不確定名の添字(後述)となってはいないこと.

EI(存在例化): $\exists x_i A x_i$ から $A\alpha_j$ を導き出すことができる.

EIR: ただし α_j は不確定名(後述)であり, しかも当面の推論過程においては未だ現われてこない新しい不確定名であること.

EG(存在汎化): At から $\exists x_i A x_i$ を導き出すことができる.

EGR: ただし t は項であり, また t は Ax_i の x_i に対して自由であること.

P*(命題論理的推論): 命題論理で正しいとされる推論式の図式は, 述語理論の正しい推論式の図式として使用できる(たとえば, $A, A \supset B \rightarrow B$; $A \supset B, B \supset C \rightarrow A \supset C$ など. ただしここでの A, B, C は, 述語論理の論理式と考える).

以上, 書式と5つの推論規則を記したが, 推論規則の各々について, その根拠などをさらに説明する前に, 見通しをよくするため, それらをどのように使うか, そのおおよそを先の簡単な例1, 例2で見ておこう.

例題1　例1の推論が正しいことを示せ.

(1)	$\forall x(Px \supset Qx)$	前提
(2)	$\forall x(Qx \supset Rx)$	前提
(3)	$Px \supset Qx$	(1)UI
(4)	$Qx \supset Rx$	(2)UI
(5)	$Px \supset Rx$	(3)(4)P*
(6)	$\forall x(Px \supset Rx)$	(5)UG

注意　i) 3行目の右側, (1) UI は, (1)に UI を適用した結果であることを示す注釈. ii) 5行目の右側にある P* は, いまの場合, $A \supset B, B \supset C \rightarrow A \supset C$ である. iii) 6行目で UG が使えるのは, (5)の x が前提(1), (2)で自由変項として現われていないためであ

る(UGR 1を参照).

例題2 例2の推論が正しいことを示せ.

(1)	$\forall x(Px \supset Qx)$	前提
(2)	$\exists x(Px \wedge Rx)$	前提
(3)	$P\alpha \wedge R\alpha$	(2)EI
(4)	$P\alpha \supset Q\alpha$	(1)UI
(5)	$P\alpha$	(3)P*
(6)	$Q\alpha$	(4)(5)P*
(7)	$R\alpha$	(3)P*
(8)	$Q\alpha \wedge R\alpha$	(6)(7)P*
(9)	$\exists x(Qx \wedge Rx)$	(8)EG

注意 i) 3行目について. 前提に∀,∃があるときは, ∃の方から例化するのが定石. ii) 4, 9行目について. 不確定名αも個体記号の1種であり, 項である. iii) 5, 6, 7, 8行目のP*は各々$A \wedge B \to A$; $A, A \supset B \to B$; $A \wedge B \to B$; $A, B \to A \wedge B$である.

5つの規則の根拠とそれに伴う条件

[1] UI, EG, P*について. まずUIが正当なものであることは, 前節で見たとおり$\forall x_i Ax_i \supset At$が妥当式であること, よって先に記した正しい推論の満たすべき条件に照して$\forall x_i Ax_i \to At$が正しい推論になることから明らかであろう. と同時に, $\forall x_i Ax_i \supset At$が妥当式であることに伴う条件から, 当然UIRが伴うことも明らかであろう. またEG, EGRについても同様で, その正当性は$At \supset \exists x_i Ax_i$が妥当式であること, およびそれに伴う条件にもとづいている. さらにまたP*についても同様で, その正当性は, トートロジーの図式に述語論理の式を代入したものが妥当式になることにもとづいているといえる.

[2] UG, EIについて. 問題はUG, EIにある. すなわち$At \supset \forall x_i Ax_i$および$\exists x_i Ax_i \supset At$は明らかに妥当式とはいえず, UG, EIは無条件では全く認められない. 実際これらが無条件に認められれば, $\exists x_i Ax_i$から$\forall x_i Ax_i$が引き出され, 部分についていえることが全体にもいえることになり, きわめて単純な過ちを許すことになってしまう. しかし一方で, もしAx_iが$\forall x_i Ax_i$からUIによって得られたものであるなら, Ax_iに$\forall x_i$をつけたとしても, もとの$\forall x_i$

Ax_i に戻るだけであり，Ax_i に $\forall x_i$ を付加することはそれなりに許されそうである．また $\exists x_i Ax_i$ から $\exists x_i$ をとって Ax_i を引き出す過程についても，もしその Ax_i の x_i が，A である限りのあるものとして，全くの任意なあるものでなく，A であるという限定された任意性をもつものであることをはっきり注意しておくなら，Ax_i は「A である限りのあるものは A である」(真)であり，それなりに許されそうである．そして実際，大雑把にいえば，先に提示したUG, EIは，まさにいま述べた2つの事柄がその各々の正当性の根拠となるように，しかも上に触れた単純な過ちを犯さずに済むように定式化された規則といえるのである．

まずEIを取り上げよう．ここでの定式化の要点は，「不確定名」(indefinite name)と呼ばれる限定された任意性を表わす新たな個体記号(i.e. 項)の導入である．すなわち A で限定されるあるもの(i.e. A である限りのあるもの)，という一種の変項を新たに α_j という記号で表わすのである．そしてこのように α_j の導入を前提しさえすれば(これがEIR)，$A\alpha_j$ がつねに真となることから，$\exists x_i Ax_i \supset A\alpha_j$ もつねに真となり，結局 $\exists x_i Ax_i \rightarrow A\alpha_j$ (i.e. EI)が正しい推論として認められるのである．

注意　i) 各々の限定に1対1に不確定名が対応するように $\alpha_j (j=1, 2, 3, \cdots)$ を用意する．しかし実際には，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ と少数で済むときは，その代りに α, β, γ を使うことにする．ii) 念のため，不確定名の具体例を見ておこう．たとえば先の例題2に登場する $P\alpha \wedge R\alpha$ の場合，その α によって，日本人(P)でしかもノーベル賞受賞者(R)であるようなあるもの(i.e. 湯川，朝永，江崎，川端，佐藤，福井の中のだれか)が指示される．

次にUGを取り上げよう．UGの定式化も実は不確定名の導入によって可能になる．というのは，以下に見るように x_i が限定された任意性をもつか否かの判定が容易になるからである．すなわち不確定名の使用が予め認められており，しかも x_i が前提の諸式(妥当式は除く)において自由変項として現われていない場合，それにもかかわらずもし x_i が当面する推論過程に自由変項として現われているなら，その x_i はUIによって生じてきた自由変項かまたは前提の妥当式から生じてきた自由変項と考えられ，それはいわば全くの任意性をもっていると認定できる．それに対して，たとえば Bx_i というかたちで x_i が前提において自由変項として現われている場合，前提として当然 Bx_i が成立

しているものとされる以上，その x_i は B である限りのあるものと考えざるを得ず，その x_i は限定された任意性をもつものと認定できる．つまり x_i が前提に自由変項として現われているか否かによって，x_i が限定的か否かがはっきりするのである．そこで，一方全くの任意性をもっている x_i については，それを含む式に $\forall x_i$ を付加することにもとより何らの問題もない以上，結局 x_i が前提の諸式(妥当式は除く)において自由変項として現われていない限り(i.e. UGR1)，$Ax_i \to \forall x_i Ax_i$ (i.e. UG)は正しい推論と認められるのである．

[3] UGR 2について． UGにはもう1つUGR 2という条件が伴っている．これはEIに伴う不確定名 α の導入と関係がある．しかしまず何が問題であるかを見るために，次のような簡単な推論を取り上げてみよう．

(1)	$\forall x \exists y (x<y)$	前提
(2)	$\exists y (x<y)$	(1)UI
(3)	$x<\alpha$	(2)EI
(4)	$\forall x (x<\alpha)$	(3)UG
(5)	$\exists y \forall x (x<y)$	(4)EG

この推論の各段階での推論規則の使い方には，とくに間違ったところはない．しかしこの推論は明らかに誤っている．では，どこに誤りの原因があるのであろうか．注意深く見直すとき，それが(3)から(4)への移行にあるのに気付く．すなわち(3)の α は，$x<y$ を満たす限りの y であり，確かに限定されているが，その限定は x の値によって変ってくるといえる．にもかかわらずその点を無視し，α の限定を一定のものと考えてしまうと，今度は逆に x が全くの任意性をもった変項であるとはいえなくなる．したがってそのような x を(4)で不用意にUGしたことが，誤りを生んだ原因であるといえるのである．

ではこうした誤りを防ぐには，一般にどのような方策を立てたらよいか．しかし直ちに，不確定名の限定に影響を与える変項に対して，UGの使用を制限すればよいことが分かる．そこでまず，この影響を与える変項をはっきりさせるために，「添字つきの不確定名」なるものを，その不確定名をはじめて含む論理式に現われるすべての自由変項をその不確定名の右下に添字として伴ったものである(たとえば α_x, α_{xy} などのように)，と定義する．そしてその上で，UGへの制限を次のように与える．すなわち，添字つきの不確定名の添字となって

いる自由変項については，それをUGしてはいけない．つまりこれがUGR 2に他ならない．

注意 上の例の場合，(3)はいまや $x<\alpha_x$ とすべきである．よって(4)への移行はUGR 2によって禁止される．

[4] 再びUG, EIについて． UG, EIについての上の[2]での説明は少々直観的である．そこで今度はもう少し正確にその根拠を与えておく．まずUGについてであるが，UGが改めて次のように表わせることは明らかであろう．

(1) $C\rightarrow Ax_i \Rightarrow C\rightarrow \forall x_i Ax_i$ （ただし x_i は C において自由変項として現われていない）．

すると(1)が成立するためには，正しい推論の条件Cにより，次の(2)が成立することが要求されてくる．

(2) $\models C\supset Ax_i \Rightarrow \models C\supset\forall x_i Ax_i$ （ただし x_i は C において自由変項として現われていない）．

そこで(2)を得るためにまず簡単な補題を1つ記しておく．

補題 3.2 1) $\mathrm{I}\models A, \mathrm{I}\models A\supset B \Rightarrow \mathrm{I}\models B$.

2) $\models A, \models A\supset B \Rightarrow \models B$.

3) $\models A \Rightarrow \models\forall x_i A$.

証明 1) $\mathrm{I}\models A\supset B$ は，定義により，$\mathrm{I}\models A$ なら $\mathrm{I}\models B$．すると一方で $\mathrm{I}\models A$ ゆえ，$\mathrm{I}\models B$ を得る．

2) すべてのIについて $\mathrm{I}\models A$，およびすべてのIについて $\mathrm{I}\models A\supset B$ であるゆえ，すべてのIについて，$\mathrm{I}\models A$ かつ $\mathrm{I}\models A\supset B$ である．よってここから1)の結果を使って，すべてのIについて $\mathrm{I}\models B$ である，を得る．

3) すべてのIについて $\mathrm{I}\models A$ である，とする．すると，すべてのIについて，すべての I'（ただし I' はIと高々 x_i への意味づけのみが異なっている）について $\mathrm{I}'\models A$ である，といえる．すなわち，すべてのIについて $\mathrm{I}\models\forall x_i A$ である． □

実際この補題と前節で紹介した妥当式の1つ，

(3) $\models\forall x_i(C\supset Ax_i)\supset(C\supset\forall x_i Ax_i)$ （ただし x_i は C に自由変項として現われていない）

とから，(2)は容易に得られる．すなわちまず(2)の左辺を仮定する．すると補題

3.2の3)を使って，$\vDash\forall x_i(C\supset Ax_i)$がいえ，さらにこれと(3)より補題3.2の2)を使って，$\vDash C\supset\forall x_i Ax_i$が得られる．つまりUGの正当性は結局(3)なる妥当式にもとづいているのである．

次にEIについてであるが，先の説明でも触れたように，Ax_iを前提の1つとした上でCを引き出していくことが，Aである限りのあるものをα_jで表わし，$A\alpha_j$からCを引き出していくことに他ならない点に十分注意するなら，EIも改めて次のように表わすことができる．

(4)　$Ax_i \to C \Rightarrow \exists x_i Ax_i \to C$　　(ただしx_iはCにおいて自由変項として現われていない)．

すると(4)が成立するためには，正しい推論の条件Cにより，次の(5)の成立が必要となってくる．

(5)　$\vDash Ax_i\supset C \Rightarrow \vDash\exists x_i Ax_i\supset C$　　(ただしx_iはCにおいて自由変項として現われていない)．

しかし(5)も，UGの場合と同様にして，次の妥当式から得られる．

(6)　$\vDash\forall x_i(Ax_i\supset C)\supset(\exists x_i Ax_i\supset C)$　　(ただしx_iはCにおいて自由変項としては現われない)．

つまりEIの正当性は結局(6)なる妥当式にもとづいているのである．

注意　以上で一応5つの推論規則にもとづく推論法を述べたが，UI, UG, EI, EG, P*の根拠となる妥当式の妥当性が厳密には証明されていないこと，また上の規則だけで正しい推論のすべてをカバーできること(完全性，後出)の証明がされていないことなど，理論的には未だ不十分である．しかしこれらの点は，最終的にはすべて証明されるのであり(第4章)，したがって上述した推論法は，正当なものとして承認できるのである．

§2.4　推 論―その2―

推論の進め方の例

前節で示された正しい推論の進め方(あるいは正しい推論の証明法)を，いくつかの例題を通して見ておこう．

例題1　次の推論が正しいことを示せ．

すべての実業家はいかなる空想家をも尊敬しない．

ある実業家は哲学者なるものを尊敬する．

∴　哲学者は空想家ではない．

まずこの推論を記号化し，推論式で表わしてみる．すなわち P: 実業家である，Q: 空想家である，$R○△$: ○は△を尊敬する，S: 哲学者である，とすると，明らかにそれは，

$$\forall x(Px\supset\forall y(Qy\supset\neg Rxy)),\exists x(Px\wedge\forall y(Sy\supset Rxy))\rightarrow\forall y(Sy\supset\neg Qy)$$

となる．そこであとは，前提の2つの式から結論の式に至るまでの過程を，実際に描いてみればよい．

(1)	$\forall x(Px\supset\forall y(Qy\supset\neg Rxy))$	前提
(2)	$\exists x(Px\wedge\forall y(Sy\supset Rxy))$	前提
(3)	$P\alpha\wedge\forall y(Sy\supset R\alpha y)$	(2)EI
(4)	$P\alpha\supset\forall y(Qy\supset\neg R\alpha y)$	(1)UI
(5)	$P\alpha$	(3)P*
(6)	$\forall y(Qy\supset\neg R\alpha y)$	(4)(5)P*
(7)	$\forall y(Sy\supset R\alpha y)$	(3)P*
(8)	$Qy\supset\neg R\alpha y$	(6)UI
(9)	$Sy\supset R\alpha y$	(7)UI
(10)	$R\alpha y\supset\neg Qy$	(8)P*
(11)	$Sy\supset\neg Qy$	(9)(10)P*
(12)	$\forall y(Sy\supset\neg Qy)$	(11)UG

注意　i) 3，4行目について．先にも注意したように，∃の方から例化する．そしてその結果に合せて∀を例化する．なお(1)，(2)式の内部にある∀についてはこの段階では例化できない．式の先頭にある限量記号のみが例化の対象となる．ii) 5，6，7，10，11行目のP*は各々，$A\wedge B\rightarrow A$；$A, A\supset B\rightarrow B$；$A\wedge B\rightarrow B$; $A\supset\neg B\rightarrow B\supset\neg A$; $A\supset B, B\supset C\rightarrow A\supset C$である．iii) 12行目について．(11)式の y は，(1)，(2)の各式 (i.e. 前提) で自由変項として現われていないゆえ，それをUGすることは当然認められる．

例題2　次の推論が正しいことを示せ．

　すべての馬は動物である．

∴　すべての馬の頭は動物の頭である．

注意　この例は，ドゥ・モルガンによって，その正しさが自明的であるにもかかわらず，伝統的形式論理学の範囲ではその正しさを証明できない推論であると指摘された，有名なものである．

まずその推論式を書こう．すなわちP: 馬である，Q: 動物である，R○△:○は△の頭である，とすると，それは，

$$\forall x(Px\supset Qx)\rightarrow\forall x(\exists y(Py\wedge Rxy)\supset\exists y(Qy\wedge Rxy)) \tag{1}$$

と書ける．次に(1)の証明であるが，この(1)の場合，単純に前提の式から徐々に結論の式を引き出そうとしても，直ちに行き詰ってしまう．しかしこの行き詰りも，次の便利な定理の系 4.2 を利用することによって解決される．そこで先に定理とその系を記しておく．

定理 4.1　$A_1,\cdots,A_n\models C\ \Leftrightarrow\ A_1,\cdots,A_{n-1}\models A_n\supset C.$

証明　1) ⇒について．はじめに$\mathrm{I}\models A_1$かつ…かつ$\mathrm{I}\models A_{n-1}$と仮定する．その上でまず i) $\mathrm{I}\models A_n$とする．すると前提(i.e. 左辺)より$\mathrm{I}\models A_1$かつ…かつ$\mathrm{I}\models A_n$なら$\mathrm{I}\models C$であるゆえ，$\mathrm{I}\models C$を得る．すなわち$\mathrm{I}\models A_n$なら$\mathrm{I}\models C$. よって⊃の定義より$\mathrm{I}\models A_n\supset C$を得る．次に ii) $\mathrm{I}\not\models A_n$としてみる．このときは$\mathrm{I}\models C$か$\mathrm{I}\not\models C$に関係なく，⊃の定義により直ちに$\mathrm{I}\models A_n\supset C$を得る．

2) ⇐について．はじめに$\mathrm{I}\models A_1$かつ…かつ$\mathrm{I}\models A_n$と仮定しておく．すると明らかに$\mathrm{I}\models A_1$かつ…かつ$\mathrm{I}\models A_{n-1}$. 一方，前提(i.e. 右辺)より，$\mathrm{I}\models A_1$かつ…かつ$\mathrm{I}\models A_{n-1}$なら$\mathrm{I}\models A_n\supset C$ゆえ，$\mathrm{I}\models A_n\supset C$を得る．ところで再びはじめの仮定より$\mathrm{I}\models A_n$でもあるから，§2.3 の補題 3.2 の 1)を使って$\mathrm{I}\models C$を得る．□

注意　i) $A_i(1\leq i\leq n)$, Cはもとより述語論理の論理式である．すなわちそれらは開いた式であってもよい．なおこの定理は命題論理§1.3の補題 3.1 の 1)に相当する．ii) もっと簡単に§2.3の補題 3.1 と$\models((A_1\wedge\cdots\wedge A_n)\supset C)\equiv((A_1\wedge\cdots\wedge A_{n-1})\supset(A_n\supset C))$からも証明できる．iii) 述語論理の意味的論推論$A_1,\cdots,A_n\models C$の定義には本書とは少し異なったものがある(後述§4.2, p.106)．その場合には上の定理は成立しないので注意を要する．

系 4.2　$A_1,\cdots,A_n\rightarrow C\ \Leftrightarrow\ A_1,\cdots,A_{n-1}\rightarrow A_n\supset C.$

証明　正しい推論への要請と上の定理より明らか．□

さて(1)の証明の問題に戻ろう．しかしいまや定理の系 4.2 を使えば，それは次の

$$\forall x(Px\supset Qx),\exists y(Py\wedge Rxy)\rightarrow\exists y(Qy\wedge Rxy) \tag{2}$$

が正しいことを証明しさえすればよいことが分かってくる．すなわち(2)が正しいなら，定理の系 4.2 を使って，

$$\forall x(Px\supset Qx)\rightarrow\exists y(Py\wedge Rxy)\supset\exists y(Qy\wedge Rxy) \tag{3}$$

が正しいものとなり，さらに(3)の前提でxは自由変項として現われていないゆえ，(3)にUGを適用することによって(1)が正しい推論式として得られるからである．

そこで(2)の証明を次に描いておこう．

(1) $\forall x(Px \supset Qx)$ 前提

(2) $\exists y(Py \wedge Rxy)$ 前提

(3) $P\alpha_x \wedge Rx\alpha_x$ (2)EI

(4) $P\alpha_x \supset Q\alpha_x$ (1)UI

(5) $P\alpha_x$ (3)P*

(6) $Q\alpha_x$ (4)(5)P*

(7) $Rx\alpha_x$ (3)P*

(8) $Q\alpha_x \wedge Rx\alpha_x$ (6)(7)P*

(9) $\exists y(Qy \wedge Rxy)$ (8)EG

注意 i) 8行目のP*は，$A, B \rightarrow A \wedge B$である．ii) この推論での$\alpha$は，自由変項$x$によって支配される可能性がある．そこで添字つきの不確定名α_xにしておく．ただしこの推論の場合，この点がこの推論に実質的な影響を与えることはないが．

例題3 $\neg\forall xPx \rightarrow \exists x\neg Px$ が正しいことを示せ．

この推論の証明にはP*の1つである背理法を使う．またすでに妥当式であると分かっている式は，新たな前提としてどの行に導入しても問題はなく，このことも使う．

(1) $\neg\forall xPx$ 前提

(2) $\neg\exists x\neg Px$ 仮定(背理法)

(3) $\neg Px \supset \exists x\neg Px$ 妥当式

(4) $\neg\exists x\neg Px \supset \neg\neg Px$ (3)P*(対偶)

(5) $\neg\neg Px$ (2)(4)P*

(6) Px (5)P*

(7) $\forall xPx$ (6)UG

(8) $\neg\forall xPx \wedge \forall xPx$ (1)(7)P*

(9) $\exists x\neg Px$ (2)(8)P*(背理法)

注意 この例題の推論式には，$\neg\forall xPx \supset \exists x\neg Px$ が対応しており，上の正しさの証明は，$\neg\forall xPx \supset \exists x\neg Px$ の妥当式であることの証明にもなっている．

問 次の推論が正しいことを示せ.

1) ある少女は少年である太郎が好きである.
すべての少年はすべての少女が好きである.

∴ 太郎を好きでしかも太郎に好かれる少女がいる.

2) ある数学者は変人である.
ある実業家はいかなる変人も尊敬しない.

∴ ある数学者はすべての実業家によっては尊敬されない.

分析タブロー

述語論理では推論の判定問題は，一般には解けない．命題論理の判定問題に使用したタブローの方法によっても，もとより解けない．しかしこの分析タブローの方法は，判定問題と切り離しても，与式が妥当式であることの別の証明法として，便利である．そこで述語論理でのタブローを作るのに必要な規則を簡単に記しておこう．

V_1	$\forall x_i A x_i$ | At	V_2	$\neg\forall x_i A x_i$ | $\neg A\alpha_j$	VI_1	$\exists x_i A x_i$ | $A\alpha_j$	VI_2	$\neg\exists x_i A x_i$ | $\neg At$

ただし $\mathrm{V}_1, \mathrm{VI}_2$ の t は Ax_i の x_i に対して自由な任意の項であり，また V_2, VI_1 の α_j は，A である限りのあるものであり，それは A に対応しているように決める．

注意 もとより上の4つの規則の他に，命題論理で示した7つの規則(p. 32–33)も使う．

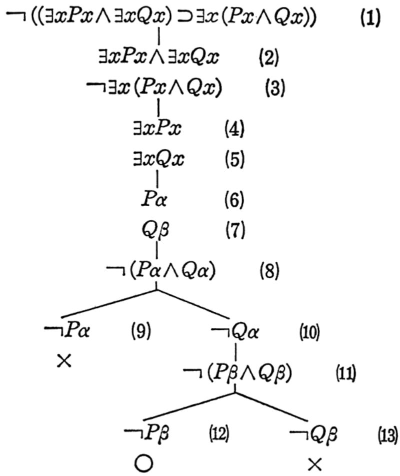
例題 1 $\forall x(Px \supset Qa) \supset (\exists x Px \supset Qa)$ が妥当式であることを示せ．

$$\neg(\forall x(Px \supset Qa) \supset (\exists x Px \supset Qa)) \quad (1)$$
$$|$$
$$\forall x(Px \supset Qa) \quad (2)$$
$$\neg(\exists x Px \supset Qa) \quad (3)$$
$$|$$
$$\exists x Px \quad (4)$$
$$\neg Qa \quad (5)$$
$$|$$
$$P\alpha \quad (6)$$
$$|$$
$$P\alpha \supset Qa \quad (7)$$

$$\neg P\alpha \quad (8) \qquad\qquad Qa \quad (9)$$
$$\times \qquad\qquad\qquad\qquad \times$$

注意 i) (2), (3)は(1)より I_2 を使った結果である． ii) (4), (5)は(3)に I_2 を使った結果である． iii) (6)は(4)に VI_1 を使った結果である． iv) (7)は(2)に V_1 を使った結果である． v) (8), (9)は(7)に I_1 を使った結果である．

例題 2 $(\exists xPx\wedge\exists xQx)\supset\exists x(Px\wedge Qx)$ が妥当式でないことを示せ．



注意 i) (8), (11)は各々(3)に VI_2 を使った結果である． ii) 上のタブローは，$P\alpha, Q\beta$ が真，$P\beta, Q\alpha$ が偽とするような解釈を与えることによって(1)が真となることを，すなわち与式が偽にもなり得ることを示している．

問 $(\exists xPx\supset Qa)\supset\forall x(Px\supset Qa)$ が妥当式であることを示せ．

同一性について

個体間の等しいことを述べる「同一性」(identity)の関係は，きわめて頻出度の高い述語である．それゆえ単に多くの述語のなかの 1 つとして取り扱うよりも，論理語の一種とみなして取り扱うという考え方も生ずる．実際これは，内容から見ても同一性ということが基本的な関係であることから，自然な考え方といえる．しかしそのためには，同一性という関係(以下その記号としては＝を使う)を改めて明確に定義しなければならない．そしてその場合，論理では普通，＝のもつ基本的な性質のうち，「反射性」(reflexivity)と「代入可能性」

(substitutibity) が注目され，それらによって＝が定義される．なお同一性を論理語としてみなしていく述語論理は，「同一性を伴った述語論理」(predicate logic with equality) と呼ばれる．

定義 次の 1)～3) を満たす 2 項述語＝を同一性あるいは等号という．

1) $\models \forall x_i (x_i = x_i)$.

2) $x_i = x_j, Ax_i \models Ax_j$. ただし Ax_j は Ax_i の x_i が現われているところ(必ずしもそのすべてでなくともよい)を，x_j に置きかえた論理式である．また x_j は Ax_i の x_i に対して自由でなければならない．

3) $x_i = x_j \models f_k(\cdots, x_i, \cdots) = f_k(\cdots, x_j, \cdots)$. ただし $f_k(\cdots, x_j, \cdots)$ は $f_k(\cdots, x_i, \cdots)$ の x_i のところ(必ずしもそのすべてでなくともよい)を，x_j に置きかえたものである．

注意 i) 上の 1) が反射性であり，2), 3) が代入可能性である． ii) ＝についての他の基本的な性質である対称性 (i.e. $(x=y) \supset (y=x)$)，推移性 (i.e. $(x=y) \supset ((y=z) \supset (x=z))$) などは上の 1), 2) から直ちに得られる．

ところで上の＝の定義は，それに対応して＝についての推論の進め方の規則 ID を，先の 5 つの規則に加えて，次のように与えることにもなる．

ID 1: $t=t$ は前提に関係なくつねに導き出すことができる．なお t は項である．

ID 2: $s=t$ と As から At を導き出すことができる．なお s, t は項であり，また At は As の s の現われるところ(必ずしもそのすべてでなくともよい)を，t で置きかえた論理式である．

ID 2 R: ただし s, t の中に現われてくる変項は，As の中では束縛されていないこと．

ID 3: $s=t$ から $f_i(\cdots, s, \cdots) = f_i(\cdots, t, \cdots)$ を導き出すことができる．なお $f_i(\cdots, t, \cdots)$ は $f_i(\cdots, s, \cdots)$ の s ところ(必ずしもそのすべてでなくともよい)を，t で置きかえたものである．

注意 ID 2 に条件 ID 2 R が必要となるのは，次のような誤った推論を防ぐためである．

(1)	$x = y$	前提
(2)	$\exists y \neg (x = y)$	前提
(3)	$\exists y \neg (y = y)$	(1)(2) ID 2

上の規則の使い方を見るために，＝を含む推論の例題を2つほど記しておこう．

例題1　次の推論が正しいことを示せ．

その著者はカント主義者である．

カント主義者はヘーゲルを好まない．

加藤はヘーゲルを好む．

∴　その著者は加藤ではない．

まず a: その著者，P: カント主義者，$Q\bigcirc\triangle$: ○は△を好む，b: ヘーゲル，c: 加藤，として推論式を書くと，

$$Pa, \forall x(Px \supset \neg Qxb), Qcb \to \neg(a=c)$$

となる．次にその証明を与えよう．

(1)	Pa	前提
(2)	$\forall x(Px \supset \neg Qxb)$	前提
(3)	Qcb	前提
(4)	$\neg\neg(a=c)$	仮定(背理法)
(5)	$a=c$	(4)P*
(6)	$Pa \supset \neg Qab$	(2)UI
(7)	$\neg Qab$	(1)(6)P*
(8)	$\neg Qcb$	(5)(7)ID2
(9)	$Qcb \wedge \neg Qcb$	(3)(8)P*
(10)	$\neg(a=c)$	(4)(9)P*(背理法)

次に少し数学的な例を取り上げてみよう．

例題2　次の推論式が正しいことを示せ．

$$\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z), \forall x(x \cdot e = x), \forall x(x \cdot x^{-1} = e)$$
$$\to \forall x \forall y \forall z(x \cdot z = y \cdot z \supset x = y)$$

注意　この例の3つの前提は，いわゆる「群」(group)の公理である．また結論部分は，群の簡約律である．

(1)	$\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$	前提
(2)	$\forall x(x \cdot e = x)$	前提
(3)	$\forall x(x \cdot x^{-1} = e)$	前提

(4)	$x \cdot z = y \cdot z$	仮定
(5)	$(x \cdot z) \cdot z^{-1} = (x \cdot z) \cdot z^{-1}$	ID 1
(6)	$(x \cdot z) \cdot z^{-1} = (y \cdot z) \cdot z^{-1}$	(4)(5)ID 2
(7)	$x \cdot (z \cdot z^{-1}) = (x \cdot z) \cdot z^{-1}$	(1)UI
(8)	$z \cdot z^{-1} = e$	(3)UI
(9)	$x \cdot e = (x \cdot z) \cdot z^{-1}$	(7)(8)ID 2
(10)	$x \cdot e = x$	(2)UI
(11)	$x = (x \cdot z) \cdot z^{-1}$	(9)(10)ID 2
(12)	$y \cdot (z \cdot z^{-1}) = (y \cdot z) \cdot z^{-1}$	(1)UI
	$\vdots$	(7)~(11)と同様に.
(16)	$y = (y \cdot z) \cdot z^{-1}$	
(17)	$x = (y \cdot z) \cdot z^{-1}$	(6)(11)ID 2
(18)	$x = y$	(16)(17)ID 2
(19)	$x \cdot z = y \cdot z \supset x = y$	(4)(18)P*
(20)	$\forall x \forall y \forall z (x \cdot z = y \cdot z \supset x = y)$	(19)UG

注意 (4)の式は結論に現われた式の⊃の前件部分.

一意的存在

数学などでは，単に A なる条件を満たすものの存在を主張するだけでなく，それが唯1つであることを同時に主張する表現がよくある．すなわち一意的存在を表わす命題である．以下それを $\exists_1 x(Ax)$ あるいは $\exists! x(Ax)$ という記号で表わすことにする.

しかしこの「一意性」(uniqueness)ということは，同一性(=)を使うと，$\forall x \forall y((Ax \wedge Ay) \supset x=y)$ として容易に表わされる．よって一意的存在も，$\exists x Ax \wedge \forall x \forall y((Ax \wedge Ay) \supset x=y)$ と表わされる．あるいはそれをより簡潔にした $\exists x(Ax \wedge \forall y(Ay \supset x=y))$ で表わされる．つまり $\exists_1 x Ax$ は,

$$\exists_1 x Ax \underset{\mathrm{df}}{\equiv} \exists x(Ax \wedge \forall y(Ay \supset x = y))$$

と定義することができるのである.

◇ ラッセルの記述の理論

同一性に関連した事柄として，ラッセル Russell の「記述の理論」(Theory of description)について簡単に触れておこう．

記述 まず「記述」(description)ということであるが，論理では，次のような表現のことをいう．すなわちそれは，少なくとも1つの述語(i.e. 集合が対応してくるような語)を含みながら，表現全体としては唯1個のもの(i.e. 個体)を指示する，というような表現のことである．たとえば 1)「現在のアメリカの大統領」，2)「ウェイバリーの著者」などがそうである．実際いずれも，「現在の」「アメリカの」「大統領」「の著者」などの集合が対応する語を含んでいながら，しかし明らかに全体としては個体を指示している．

ところでそうすると，こうした記述と呼ばれる表現は，述語論理の立場から記号化するとき，まずは各々個体記号の b, c などで表わさざるを得ない．しかし一方で述語を含んでいる以上，それらを大文字の記号で表わす必要のある述語論理の立場では，本当はそれだけで済ますわけにはいかない．そこでこの辺の事情を解決するために，新たに導入されてくるのが「記述子 ι」(iota operator)である．すなわち $\iota x(Ax)$ で，A である唯1つのもの，を表わそうという記号化である．たとえば上の 1)は，P：現在の，Q：アメリカの，R：大統領とし，しかも ιx を使うと，いまや $\iota x(Px \wedge Qx \wedge Rx)$ と表わされる．また上の 2)は，a: ウェイバリー，$P○△$: ○は△の著者である，とすると，$\iota xPxa$ と記号化される．と同時に，例文「レーガンは現在のアメリカの大統領である」は，a: レーガンとすると，いまや $a=b$ ではなく，$a=\iota x(Px \wedge Qx \wedge Rx)$ と記号化される．また別の例文「ウェイバリーの著者はイギリス人である」は，Q: イギリス人，とすると，いまや Qc ではなく，$Q\iota xPxa$ と記号化されるのである．

注意 i) $\iota x(Ax)$ という記号は，その全体で個体記号の一種となる． ii) 記述子 ιx は，必ずしも正確にではないが，定冠詞 the と対応しているといえる(上の 1), 2)の英文を考えよ)．

記述子の定義 確かに ιx を使用する記号化はそれなりに便利ではある．しかしそれを積極的に導入するためには，もう少しその性格を明確に定義する必要がある．この点に関してラッセルは，同一性(=)を使うことによって，次のような定義を与えた．

$$B\iota x(Ax) \underset{\mathrm{df}}{\equiv} \exists x(Bx \wedge \forall y(Ay \equiv y = x)) \qquad (*)$$

しかしこの定義は見ただけでは分かりにくい．そこで例によって少しばかり説明しておこう．すなわち上の「ウェイバリーの著者はイギリス人である」(♯)で考えてみる．まず ιx を使って記号化すると $Q\iota xPxa$…(1)であること，しかもそれが(*)の左辺に相当することは明らかであろう．したがって(*)の理解は，ιx を使わずに同じ例文(♯)を

記号化し，その結果が右辺に相当するものであることを確認することによって得られる．では ιx を使わずにどう記号化するか．そこでラッセルは(♯)で表現されている内容(情報)が何であるかに注目する．そして結局(♯)が，「イギリス人であり，しかもウェイバリーの著者であるものが存在し，かつウェイバリーの著者は唯1人である」(♯♯)をその内容としていると考える．つまり(♯)は(♯♯)のような存在と一意性を表明している文と同値であるとみなすのである．そしてその上で(♯♯)を記号化すると，それは

$$\exists x(Qx \land Pxa) \land \forall x \forall y((Pxa \land Pya) \supset y = x) \tag{2}$$

となり，さらに(2)を同値変形することによって，より簡潔な形をした，

$$\exists x(Qx \land Pxa \land \forall y(Pya \supset y = x)) \tag{3}$$

あるいは

$$\exists x(Qx \land \forall y(Pya \equiv y = x)) \tag{4}$$

を得ることができる．すると(2)〜(4)にはもとより ιx など含まれていず，また(4)は，まさに定義式(*)の右辺に相当している．すなわち，ラッセルによって与えられた定義(*)の意味は，もはや明らかになったといえよう．とにかく，例文(♯)を(♯♯)のように言いかえられると考えるところが，その論点なのである．なお，(*)の定義を中心とした議論をラッセルの記述の理論という．

問　(2)と(3)，(2)と(4)が各々同値であることを示せ．

参考　以上の記述の理論と文の有意味性をめぐって，以下のような議論がある．有名なので蛇足ではあるが簡単に触れておく．すなわちそれは，「現在のフランスの王様は禿頭である」(♯♯♯)という文が有意味か否かをめぐっての議論である．まずある一派から，文の有意味さの基準として，有意味な文は真理値をもつ，という主張が提出された．しかしこの基準に照らすと明らかに(♯♯♯)は無意味となってしまう．しかしわれわれの健全な言語感覚からは，たとえ現実にフランスの王様が存在しなくとも，それなりにこの文の述べていることは分かるわけで，一概に無意味とはいい切れないのである．そこでこの辺の対立した事情を，ラッセルはまさに上の記述の理論を使って説明しようとする．すなわち「現在のフランスの王様」という表現は記述であり，それを含む(♯♯♯)は，先の定義に従って存在と一意性を表現する文であると考える．すると，存在を語る部分を事実に照らして偽とすることができ，よってその文全体は偽であることになる．つまり(♯♯♯)は偽という真理値をもつことになり，先の基準に沿っても(♯♯♯)は十分有意味であると考えられるのである．

確かに以上のラッセルの議論はそれなりに興味深いが，(♯♯♯)にわれわれが感じる有意味さは，ラッセルが説明した偽なるがゆえの有意味さなのであろうか．実際この点については異論もあり，かつては話題になったものである．

第3章　公　理　系

第1，2章において，正しい推論がいかなるものであるかは，一応明らかにされた．この章では，こうした正しい推論すなわち正しい推論式(あるいはそれに対応するトートロジーや妥当式)のすべてを把握することを試みる．すなわち代表的な正しい推論式(あるいは代表的なトートロジーや妥当式)を選出し，残りをすべてそこから機械的に引き出していくという，論理の公理化の試みである．確かに第2章の§2.3，§2.4でも，その試みはすでに一部打ち出されているが，本章ではより整理されたかたちで，しかもより徹底的に実行する．というのも，第1に，このことによって推理論が完成するからであり，また第2には，ある分野の知識群を公理化する際，そこで使用される論理的な推論の部分が予め公理化されていることにより，より整備された公理系をつくれるからである．そこで以下，まず§3.1，§3.2では，ある分野の公理系と融合しやすいスタイルの論理の公理系を例示する．そして§3.3では，それがある分野の公理系とどう融合するかをながめる．またさらに§3.4では，§3.1，§3.2で例示されたものとは異なったスタイルの論理の公理系を，簡単に紹介する．

ところで論理の公理系を考えることは，正しい推論の全体把握ということの他に，別の意味合いもある．というのは，論理の公理系の公理が，$\wedge, \vee, \supset, \neg, \forall, \exists$ なる論理記号の記号としての振舞いを規定している，ともいえるからである．すなわち論理記号に対しての，真理値をふまえた定義とは異なった定義が，公理によって与えられているといえる(この点は $\wedge, \vee, \supset, \neg, \forall, \exists$ 各々の公理が示される§3.4の体系でとくに明瞭になる)．それゆえこうした公理系の定理は，公理による定義にもとづいて記号を機械的に操作し，有限的に構成(i.e. 計算)していった限りのものと考えられる．つまり公理系に純粋にかかわるということは，序ですでに触れておいたように，構文論の立場に立って論理などを捉えていくことでもある．

§3.1 命題論理の公理系 L_1

手はじめとしてこの節では，次節で取り上げる述語論理の公理系の一部分ともなる命題論理の公理系を，少しばかり見ておこう．しかしもとより命題論理の公理系といっても，公理や推論規則の選び方の違いなどから，種々のものが考えられている．ここでは後の議論(§3.3)の都合から，いわゆるヒルベルト Hilbert 流のしかも見かけが比較的簡単な体系(以下それを L_1 で表わす)を，一例として紹介しておく．

L_1 の言語

公理系を正式に展開する場合，直ちに公理や推論規則の提示から始まるのではなく，まずはその体系の「言語」(language)についての言及から始められる．すなわちそこに登場する諸記号の提示，およびその記号から構成される論理式の定義などから始められる．

1) L_1 の記号　i) 命題記号：$P_1, P_2, P_3, \cdots$．　ii) 論理記号：$\neg, \supset$，および括弧(,)．

注意　$\wedge, \vee, \equiv$ は L_1 では定義によって導入される．

2) L_1 の論理式の定義　i) P_i は論理式である(ただし $i=1,2,3,\cdots$)．なお P_i は要素式ともいう．　ii) A, B を論理式とすると，$(A)\supset(B)$，$\neg(A)$ は，各々論理式である．　iii) i), ii) によって論理式であるもののみが論理式である．

注意　括弧の省略については，§1.1の定義と同様に考える．

L_1 の公理と推論規則など

1) L_1 の公理　次の A1～A3 の 3 つからなり，A, B, C は論理式とする．

A 1　$A\supset(B\supset A)$

A 2　$(A\supset(B\supset C))\supset((A\supset B)\supset(A\supset C))$

A 3　$(\neg B\supset\neg A)\supset((\neg B\supset A)\supset B)$

注意　上の各式は，A, B, C を使って表わされていることから明らかなように，公理となる論理式の型を表わしているといえる．このような場合，A1～A3は公理といわ

ずに公理図式と呼ばれることがある.

2) L_1 の推論規則　次の MP(modus ponens の略)1 つからなる.

MP　$A, A \supset B$ から B を引き出してよい.

3) $\wedge, \vee, \equiv$ の定義　i) $A \wedge B$ は $\neg(A \supset \neg B)$ の省略である.

ii) $A \vee B$ は $\neg A \supset B$ の省略である.

iii) $A \equiv B$ は $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$ の省略である.

L_1 での証明と演繹

次に L_1 では，以上の公理をはじめとする事柄をもとに，定理の導出が展開される．しかしそれを例示する前に，L_1 での証明，L_1 の定理，L_1 での前提からの演繹ということを，はっきりと定義しておく必要がある.

定義　下記の条件(♯)を満たす L_1 の論理式からなる有限個の列 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ $(=C)$ のことを，C の L_1 での「証明」(proof) といい，C の証明が存在するとき，C は L_1 の「定理」である，または C は L_1 で「証明可能」(provable) である，という.

(♯)　B_i(ただし $1 \leq i \leq m$) は，i) L_1 の公理の 1 つであるか，または ii) それに先行する B_j, B_k(ただし $j, k < i$) から MP によって引き出された式である.

なお，C が L_1 の定理であることを，$\vdash_{L_1} C$ または混乱のないときは簡単に $\vdash C$ と表わす.

定義　下記の条件(♯♯)を満たす論理式からなる有限個の列 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ $(=C)$ のことを前提 Γ(L_1 の論理式の集合) から C への「演繹」(deduction) といい，そうした演繹が存在するとき，C は Γ から L_1 で「演繹される」(deducible)，という.

(♯♯)　B_i(ただし $1 \leq i \leq m$) は，i) L_1 の公理の 1 つであるか，または ii) Γ の中の 1 つであるか，または iii) それに先行する B_j, B_k $(j, k < i)$ から MP によって引き出された式である.

なお，C が Γ から L_1 で演繹されることを，$\Gamma \vdash_{L_1} C$ または簡単に $\Gamma \vdash C$ と表わす.

注意　i) Γ が有限の場合，$\Gamma \vdash C$ は $A_1, \cdots, A_n \vdash C$ となり，§1.3 で触れた意味論的推論 $A_1, \cdots, A_n \vDash C$ に対応する構文論的推論である．なお Γ はもとより無限集合と考

えてもよい．ii）上の定義から明らかに，無前提からの演繹が証明ともいえる．

派生規則

さっそく定理の導出を1つ例示してみよう．

T 1 $A \supset A$ (i.e. $\vdash_{L_1} A \supset A$)

証明 (1) $A \supset ((A \supset A) \supset A)$ A 1

(2) $(A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A))$ A 2

(3) $(A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)$ (1)(2)MP

(4) $A \supset (A \supset A)$ A 1

(5) $A \supset A$ (3)(4)MP □

注意 証明を形成する有限個の式の列 $B_1, \cdots, B_m$ は，実際には番号をつけて縦に並べる書式で描かれる．

ところでこのごく簡単な定理(同一律)の証明からも容易に予想できるように，L_1 の定理の証明は多少技巧的なところがある．そこでこの点を少しでも改善すべく，L_1 では MP の他に新しい推論規則として「派生規則」(derivative rule 以下 DR と略記)なるものを考える．すなわち派生規則とは，MP と同様，与えられた式から新しい式を引き出していく規則でありながら，一方で MP と異なり，その規則自身あくまで3つの公理と MP から導出されるような規則のことである．まずそうした DR の中でも強力な「演繹定理」(Deduction Theorem, 以下 DT と略記)と呼ばれるものを示そう．

DR 1 (DT) Γ を式の集合，A, C を式とするとき，

$$\Gamma, A \vdash C \Leftrightarrow \Gamma \vdash A \supset C.$$

証明 1) ⇐について．$\Gamma \vdash A \supset C$ が成立していると仮定する．すると$\vdash$の定義より，$B_1, \cdots, B_m (= A \supset C)$ が存在する．そこでこの列にさらに B_{m+1} として A，B_{m+2} として C を加えた有限列 $B_1, \cdots, B_{m+2}$ をつくってみる．すると B_{m+2} が B_{m+1} と B_m から MP で得られる式となっていること，また B_{m+1} が Γ, A のなかの1つであることから，この列の存在は明らかに $\Gamma, A \vdash C$ であることに他ならない．

2) ⇒について．$\Gamma, A \vdash C$ と仮定し，その有限個の式の列を $B_1, \cdots, B_m (= C)$ とする．そしてこの $B_i (1 \leq i \leq m)$ の i についての帰納法で証明する． $i = 1$ の

とき(i.e. $B_1=C$ のとき). このとき次の 3 つの場合が考えられる. i) B_1 は L_1 の公理の中の 1 つである, ii) B_1 は Γ の中の 1 つである, iii) B_1 は A 自身である. まず i), ii)の場合, 各々 $\vdash B_1, \Gamma\vdash B_1$ であり, 一方 A1 より $\vdash B_1\supset(A\supset B_1)$ ゆえ, MP によって, いずれの場合も $\Gamma\vdash A\supset B_1$ を得る. よって, $\Gamma\vdash A\supset C$. また iii)の場合は, T1 より $\vdash A\supset A$ ゆえ, $\vdash A\supset B_1$, すなわち $\vdash A\supset C$ を得る. よって $\Gamma\vdash A\supset C$.

$i\neq 1$ のとき(i.e. $B_i=C$ のとき). まず帰納法の仮定として, $k<i$ のとき, $\Gamma\vdash A\supset B_k$ と仮定する. ところで今度は, 次の 4 つの場合が考えられる. i) B_i は L_1 の公理の中の 1 つである, ii) B_i は Γ の中の 1 つである, iii) B_i は A 自身である, iv) B_i は $B_j, B_l\,(j,l<i)$ から MP によって得られた式である. このうち i), ii), iii)の場合は, $i=1$ のときと同様に考えられる. そこで iv)の場合について示す. まず B_j, B_l のうちの一方(B_l としよう)は $B_j\supset B_i$ の形をしていると考えられる. すると帰納法の仮定より, $\Gamma\vdash A\supset B_j$ および $\Gamma\vdash A\supset(B_j\supset B_i)$ を得る. また一方で A2 より, $\vdash(A\supset(B_j\supset B_i))\supset((A\supset B_j)\supset(A\supset B_i))$ である. よって MP を使って, $\Gamma\vdash A\supset B_i$ を得る. すなわちこの場合も, $\Gamma\vdash A\supset C$. □

注意 i) DT は A 1, A 2, T 1, MP にもとづく. したがって DT は A 1, A 2, MP のみにもとづいている. ii) またこの DT は§1.3の補題 3.1 の 1) に対応している.

L_1 の定理の例

続いて上の DT を使うと直ちに得られる簡単な DR を 2 つほど示そう.

DR 2 $A\supset B, B\supset C\vdash A\supset C$

DR 3 $A\supset(B\supset C), B\vdash A\supset C$

問 DR 2, DR 3 を証明せよ.

次にこれらの DR をも使って得られる定理(定理図式)を少しばかり例示しておく.

T 2 $\neg\neg A\supset A$

T 3 $A\supset\neg\neg A$

T 4 $\neg A\supset(A\supset B)$

T 5 $(\neg B\supset\neg A)\supset(A\supset B)$

T 6 $(A\supset B)\supset(\neg B\supset\neg A)$

T 7 $A\supset(\neg B\supset\neg(A\supset B))$

T 8 $(A\supset B)\supset((\neg A\supset B)\supset B)$

このうち参考として T 2, T 4, T 8 にはその証明も添えておこう.

T 2 の証明 (1) $(\neg A \supset \neg\neg A) \supset ((\neg A \supset \neg A) \supset A)$ A 3

(2) $\neg A \supset \neg A$ T 1

(3) $(\neg A \supset \neg\neg A) \supset A$ (1)(2)DR 3

(4) $\neg\neg A \supset (\neg A \supset \neg\neg A)$ A 1

(5) $\neg\neg A \supset A$ (3)(4)DR 2 □

T 4 の証明 (1) $\neg A$
(2) A } 前提

(3) $A \supset (\neg B \supset A)$ A 1

(4) $\neg A \supset (\neg B \supset \neg A)$ A 1

(5) $\neg B \supset A$ (2)(3)MP

(6) $\neg B \supset \neg A$ (1)(4)MP

(7) $(\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)$ A 3

(8) B (5)(6)(7)MP 2 回

よって，$\neg A, A \vdash B$ が示された．あとはこれに DR 1 を 2 回使って $\vdash \neg A \supset (A \supset B)$． □

T 8 の証明 (1) $A \supset B$
(2) $\neg A \supset B$ } 前提

(3) $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$ T 6

(4) $\neg B \supset \neg A$ (1)(3)MP

(5) $(\neg A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg\neg A)$ T 6

(6) $\neg B \supset \neg\neg A$ (2)(5)MP

(7) $(\neg B \supset \neg\neg A) \supset ((\neg B \supset \neg A) \supset B)$ A 3

(8) B (4)(6)(7)MP 2 回

よって，$A \supset B, \neg A \supset B \vdash B$ が示された．あとはこれに DR 1 を 2 回使えば T 8 を得る． □

注意 上に例示した定理 T 1～T 8 は，L_1 の定理の集合がトートロジーの集合と一致すること (i.e. 完全性) を示すのに必要となる (カルマールによる証明を参照，p. 130)．すなわち T 1～T 8 を導出しておけば，トートロジーとみなせる式はすべて導出できることを示し得るわけで，理論的には差し当り T 1～T 8 を例示しておけば十分ともいえる．

問 T 3, T 5, T 6, T 7 を証明せよ．

L_1 の定理の例（つづき）

さらに $\wedge$ を性格づける式に相当する T 9, T 10, $\vee$ を性格づける式に相当する T 11, T 12, ドゥ・モルガンの法則の 1 つに相当する T 13 および分配律の 1 つに相当する T 14 なども例示しておこう．

T 9　$\neg(A\supset\neg B)\supset A$　　**T 10**　$A\supset(B\supset\neg(A\supset\neg B))$

T 11　$A\supset(\neg A\supset B)$

T 12　$(A\supset C)\supset((B\supset C)\supset((\neg A\supset B)\supset C))$

T 13　$\neg(\neg A\supset B)\supset\neg(\neg A\supset\neg\neg B)$

T 14　$\neg(A\supset\neg(\neg B\supset C))\supset(\neg\neg(A\supset\neg B)\supset\neg(A\supset\neg C))$

ところでこれらの証明であるが，参考として T 13 の証明を添えておく．

T 13 の証明　(1)　$\neg\neg B\supset B$　　T 2

(2)　$(\neg\neg B\supset B)\supset(\neg A\supset(\neg\neg B\supset B))$　　A 1

(3)　$\neg A\supset(\neg\neg B\supset B)$　　(1)(2)MP

(4)　$(\neg A\supset(\neg\neg B\supset B))\supset((\neg A\supset\neg\neg B)\supset(\neg A\supset B))$　　A 2

(5)　$(\neg A\supset\neg\neg B)\supset(\neg A\supset B)$　　(3)(4)MP

(6)　$((\neg A\supset\neg\neg B)\supset(\neg A\supset B))\supset(\neg(\neg A\supset B)\supset\neg(\neg A\supset\neg\neg B))$　T 6

(7)　$\neg(\neg A\supset B)\supset\neg(\neg A\supset\neg\neg B)$　　(5)(6)MP　□

また残りの一部については，背理法に相当する次の DR 4 を使って得られる．

DR 4　Γ を式の集合，A, D を式とするとき，

$$\Gamma, \neg A\vdash D\wedge\neg D \Leftrightarrow \Gamma\vdash A.$$

証明　1) $\Rightarrow$ について．$\Gamma, \neg A\vdash D\wedge\neg D$ を仮定する．すると DR 1 によって，$\Gamma\vdash\neg A\supset(D\wedge\neg D)$ すなわち $\Gamma\vdash\neg A\supset\neg(D\supset\neg\neg D)$．すると，T 5 より $(\neg A\supset\neg(D\supset\neg\neg D))\supset((D\supset\neg\neg D)\supset A)$ ゆえ，MP を使って，$\Gamma\vdash(D\supset\neg\neg D)\supset A$ を得る．よってさらにこの式と T 3 の $\vdash D\supset\neg\neg D$ により，$\Gamma\vdash A$ を得る．

2) $\Leftarrow$ について．略．　□

問　T 9, T 10, T 14 を証明せよ．

§3.2 述語論理の公理系 L

述語論理の公理系にも，命題論理の公理系について前節の冒頭で注意したと同様に，種々の形のものがある．しかしここでは，命題論理の公理系 L_1 がその一部分となっているヒルベルト流の，しかも見かけの簡単な体系(以下それを L で表わす)を紹介する．

L の 言 語

述語論理の記号や論理式については，すでに§2.1で十分説明した．それゆえここでは，あくまでも公理系 L の一部として必要な限りの事柄を，説明なしに掲げておく．

1) L の記号　i) n項－述語記号：P_i^n(ただし $i=1,2,\cdots$)．ii) n 項－関数記号：f_i^n(ただし $i=1,2,\cdots$)．iii) 個体常項：a_i(ただし $i=1,2,\cdots$)．iv) 個体変項：x_i(ただし $i=1,2,\cdots$)．　v) 論理記号：$\neg, \supset, \forall$，および括弧(,)とカンマ'．

注意　$\wedge, \vee, \equiv, \exists$ は定義によって導入する．

2) L の項の定義　i) 個体常項 a_i，個体変項 x_i は，各々項である．ii) t_j(ただし $1\leq j\leq n$)を項とすると，$f_i^n(t_1,\cdots,t_n)$ も項である．iii) i), ii)によって項となるもののみが項である．

3) L の論理式の定義　i) $P_i^n t_1\cdots t_n$ は論理式である．なお $P_i^n t_1\cdots t_n$ は要素式ともいう．　ii) A, B を論理式とすると，$(A)\supset(B), \neg(A), \forall x_i(A)$ は，各々論理式である．　iii) i), ii)によって論理式であるもののみが，論理式である．

注意　括弧の省略などについては，§2.1での定義と同様に考える．

L の公理と推論規則など

1) L の公理

A 1　$A\supset(B\supset A)$

A 2　$(A\supset(B\supset C))\supset((A\supset B)\supset(A\supset C))$

A 3　$(\neg B\supset\neg A)\supset((\neg B\supset A)\supset B)$

A 4　$\forall x_i A x_i \supset A x_i/t$　　ただし Ax_i/t で A に含まれる自由変項 x_i のすべてのところに項 t を代入した式を表わす．また t は A の x_i に対して自由である

とする.

A 5 $\forall x_i(A \supset Bx_i) \supset (A \supset \forall x_i Bx_i)$ ただし A には x_i は自由変項としては現われていないとする.

2) 推論規則 次の MP と Gen(汎化則 Generalization の略)の 2 つからなる.

MP: $A, A \supset B$ から B を引き出してよい.

Gen: A から $\forall x_i A$ を引き出してよい.

3) $\wedge, \vee, \equiv, \exists$ の定義 $\wedge, \vee, \equiv$ については L_1 と同じである.

iv) $\exists x_i$ は, $\neg\forall x_i\neg$ の省略である.

注意 i) A 1～A 3, MP は L_1 の公理と規則に見かけは同じである. しかしもとよりここでの A, B, C は L の論理式である. ii) また L の Gen は §2.3 での UG に類似している. しかし UG の適用が条件つきであったのに対し, Gen に条件がないのは, Gen の適用が差し当り L の公理, 定理となる式についてであり, しかもそれらが含む自由変項はつねに一般任意の変項であるからである. 実際, 限定された任意性をもつ変項が現われる次に定義する前提からの演繹では, Gen も条件つきとなる.

L での証明と演繹

L でも諸定理の導出を展開していくまえに, L での証明, L の定理, L での前提からの演繹ということを, 予め定義しておく必要がある.

定義 下記の条件(♯)を満たす論理式からなる有限個の列 $B_1, B_2, \cdots, B_m (= C)$ のことを C の L での「証明」といい, C の L での証明が存在するとき, C は L の「定理」である, または C は L で「証明可能」である, という.

(♯) B_i(ただし $1 \leq i \leq m$)は, i) L の公理の 1 つであるか, または ii) それに先行する B_j, B_k(ただし, $j, k < i$)から MP によって引き出された式であるか, さらにまたは iii) それに先行する B_j から Gen によって引き出された式である.

なお, C が L の定理であることを, $\vdash_L C$ または混乱のないときは簡単に $\vdash C$ と表わす.

定義 下記の条件(♯♯)を満たす論理式からなる有限個の列 $B_1, B_2, \cdots, B_m (= C)$ のことを, 前提 Γ(任意個の L の式からなる集合)から C への L での「演繹」という. またそうした演繹が存在するとき, C は Γ から L で「演繹される」, といい, $\Gamma \vdash_L C$ または混乱のないときは簡単に $\Gamma \vdash C$ と表わす.

(♯♯) B_i(ただし $1\leq i\leq m$)は，i) L の公理の1つであるか，または ii) Γ に属する式の1つであるか，または iii) それに先行する B_j, B_k $(j, k<i)$ から MP によって引き出された式であるか，さらにまたは iv) それに先行する B_j から Gen によって引き出された式である．ただし iv)の場合，B_j に現われ，しかも Gen を適用されることになる自由変項は，B_j が得られるもとになる前提の諸式(L の公理，定理となる式は除く)において，自由変項であってはならない．

注意 i) Γ が有限個の式から成るとき，$\Gamma\vdash C$ は $A_1, \cdots, A_n\vdash C$ となり，§2.3で触れた意味論的推論 $A_1, \cdots, A_n\vDash C$ に対応するいわば構文論的推論である．Γ が任意個の式から成るとき，$\Gamma\vdash C$ に対応する意味論的推論 $\Gamma\vDash C$ は後に§4.2で定義される．ii) (♯♯)中の iv)の条件は，$Px\vdash\forall xPx$ といった演繹を排除することになる．内容的に考えれば，前提の式に現われる自由変項 x は P である限りのあるものであり，限定された任意性をもつ変項であるゆえ，当然のことである．またこの条件をつけることによって，$\Gamma\vdash C$ と $\Gamma\vDash C$ との平行関係を保つことも可能になる．詳しくは§4.3で述べる．

L の派生規則と定理—その1—

定理の証明にとって強力な手段となる「演繹定理」(DT)が，派生規則の1つとして L でも成立する．

DR 1(DT) Γ を任意個の L の式から成る集合とし，A, C を L の式とするとき，

$$\Gamma, A\vdash C \Leftrightarrow \Gamma\vdash A\supset C.$$

証明 1) $\Leftarrow$ について． 略. 2) $\Rightarrow$ について．$\Gamma, A\vdash C$ と仮定し，その有限個の式の列を $B_1, \cdots, B_m$ $(=C)$ とする．その上でこの B_i $(1\leq i\leq m)$ の i についての帰納法で証明する．$i=1$ のとき(i.e. $B_1=C$ のとき)．しかしこのときは L_1 の DT の証明における $i=1$ のときと同様.

$i\neq 1$ のとき(i.e. $B_i=C$ のとき)．このときの B_i としては i)〜v)の5つの場合が考えられえる．しかし i)〜iv)の場合は L_1 の DT のそれと同様であり，その各々の証明も L_1 のそれと同様である．そこであとは，v)の場合，すなわち B_i がそれに先行する B_j $(j<i)$ から Gen によって引き出された式(i.e. $\forall x_l B_j$)である場合について $\Gamma\vdash A\supset B_i$ となることを示す．まず B_j が A にももとづくとする．すると，DR の前提として $\Gamma, A\vdash\forall x_l B_j$ が仮定されている以上，x_l は A および Γ の中の $A\supset B_j$ がもとづく諸式において自由変項ではあり得ない．よ

って帰納法の仮定より得られる $\Gamma\vdash A\supset B_j$ と Gen とから，$\Gamma\vdash\forall x_l(A\supset B_j)$ を得る．するとさらに A 5 より $\vdash\forall x_l(A\supset B_j)\supset(A\supset\forall x_l B_j)$ ゆえ，MP を使って結局 $\Gamma\vdash A\supset\forall x_l B_j$ を得る．次に B_j が A にはもとづかないとする．このときは明らかに $\Gamma\vdash B_j$ であり，また $\Gamma, A\vdash\forall x_l B_j$ なる仮定より，x_l は Γ の中の B_j がもとづく諸式において自由変項ではあり得ない．よって $\Gamma\vdash\forall x_l B_j$ を得る．すると A1 より $\vdash\forall x_l B_j\supset(A\supset\forall x_l B_j)$ ゆえ，MP を使って $\Gamma\vdash A\supset\forall x_l B_j$ を得る． □

注意 DT が成立することから，L においても，L_1 の DR 2, DR 3 に相当するものが成立する．

次に L の定理の例として差し当り T 15〜T 19 の 5 つほどを記しておこう．

T 15 $\forall x_i\forall x_j A\supset\forall x_j\forall x_i A$ (i.e. $\vdash_L\forall x_i\forall x_j A\supset\forall x_j\forall x_i A$)

証明 $\forall x_i\forall x_j A\vdash\forall x_j\forall x_i A$ を示せば，DT によって T 15 を得る．

(1)	$\forall x_i\forall x_j A$	前提
(2)	$\forall x_i\forall x_j A\supset\forall x_j A$	A 4
(3)	$\forall x_j A$	(1)(2)MP
(4)	$\forall x_j A\supset A$	A 4
(5)	A	(3)(4)MP
(6)	$\forall x_i A$	(5)Gen
(7)	$\forall x_j\forall x_i A$	(6)Gen □

注意 (6)，(7)で Gen が使われるが，それが問題でないことは，x_i, x_j ともに前提で自由変項でないことから明らかであろう．

T 16 $\forall x_i(A\supset B)\supset(\forall x_i A\supset\forall x_i B)$

T 17 $\forall x_i(A\supset B)\supset(\exists x_i A\supset\exists x_i B)$

T 18 $\forall x_i(A\wedge B)\equiv(\forall x_i A\wedge\forall x_i B)$

T 19 $\forall x_1\forall x_2\cdots\forall x_n A\supset A$

問 T 16〜T 19 を証明せよ．

L の派生規則と定理—その 2—

ここではさらに，「同値の定理」(Equivalence Theorem)，「置きかえの定理」(Replacement Theorem)，「束縛変項の変更」(Change of bound variables)

などの便利なDRを示しておこう．まず同値の定理であるが，このためには次のT 20が必要となる．

T 20 $\forall x_i(A\equiv B)\supset(\forall x_i A\equiv\forall x_i B)$

証明 DTと$\vdash(A\equiv B)\supset(A\supset B)$を使う．略． □

DR 5(同値の定理) BをAの部分式とし，A'をAのBのところを(すべてでなくともよい)Cで置きかえて得られる式とする．さらにBまたはCの自由変項で，しかもAの中で束縛変項となってしまうものは，$x_{j_1},\cdots,x_{j_m}$の中に現われているとする．以上のとき，

$$\vdash\forall x_{j_1}\cdots\forall x_{j_m}(B\equiv C)\supset(A\equiv A').$$

証明 1) 全く置きかえが行なわれないときは，A'はAであり，また任意の式Dについて$\vdash D\supset(A\equiv A)$であることから，明らか． 2) また$B$が$A$と同じときは，$\forall x_{j_1}\cdots\forall x_{j_m}(B\equiv C)\supset(B\equiv C)$となり，A 4から，明らかに成立する．3) 次に少なくとも1個所の置きかえをした場合を考える．この場合は論理記号の数についての帰納法で証明していく．

i) Aが要素式のとき．このときBはAの真部分ではなく，BとAとは同じになる．よって上の2)から明らかに成立する．

ii) Aが¬Dのとき．A'を$\neg D'$とする．ただしD'はDに置きかえを行なった式とする．すると帰納法の仮定により，$\vdash\forall x_{j_1}\cdots\forall x_{j_m}(B\equiv C)\supset(D\equiv D')$である．ところで$\vdash(D\equiv D')\supset(\neg D\equiv\neg D')$が一方で示せるゆえ，結局$\vdash\forall x_{j_1}\cdots\forall x_{j_m}(B\equiv C)\supset(\neg D\equiv\neg D')$を得る．

iii) Aが$D\supset E$のとき．A'を$D'\supset E'$とする．ただしD',E'は各々D,Eに置きかえを行なった式とする．すると帰納法の仮定より，$\vdash\forall x_{j_1}\cdots\forall x_{j_m}(B\equiv C)\supset(D\equiv D')$および$\vdash\forall x_{j_1}\cdots\forall x_{j_m}(B\equiv C)\supset(E\equiv E')$．また一方で$\vdash((D\equiv D')\wedge(E\equiv E'))\supset((D\supset E)\equiv(D'\supset E'))$が示せるゆえ，結局$\vdash\forall x_{j_1}\cdots\forall x_{j_m}(B\equiv C)\supset((D\supset E)\equiv(D'\supset E'))$を得る．

iv) Aが$\forall x_i D$のとき．A'を$\forall x_i D'$とする．ただしD'はDに置きかえを行なった式とする．すると帰納法の仮定より，$\vdash\forall x_{j_1}\cdots\forall x_{j_m}(B\equiv C)\supset(D\equiv D')$…(1)．ところで$x_i$は$\forall x_{j_1}\cdots\forall x_{j_m}(B\equiv C)$に自由変項として現われることはない*)．よってA 5から$\vdash\forall x_i(\forall x_{j_1}\cdots\forall x_{j_m}(B\equiv C)\supset(D\equiv D'))\supset(\forall x_{j_1}\cdots\forall x_{j_m}(B\equiv C)\supset\forall x_i(D\equiv D'))$…(2)が成立する．そこで(1)にGenを適用し，さらにその結

果と(2)からMPを使うと，$\vdash \forall x_{j_1}\cdots\forall x_{j_m}(B\equiv C)\supset\forall x_i(D\equiv D')$を得る．あとはこれとT 20とにより，$\vdash \forall x_{j_1}\cdots\forall x_{j_m}(B\equiv C)\supset(\forall x_i D\equiv\forall x_i D')$を得る．　□

問　DR 5の証明における *) の部分を確認せよ．

上の同値の定理を使うと，次に置きかえの定理が証明されてくる．

DR 6(置きかえの定理)　A, B, A', CはDR 5と同じとする．このとき，次の 1)，2) が成立する．

1)　$\vdash B\equiv C \Rightarrow \vdash A\equiv A'$.

2)　$\vdash B\equiv C, \vdash A \Rightarrow \vdash A'$.

証明　1) $\vdash B\equiv C$とする．Genにより$\vdash \forall x_{j_1}\cdots\forall x_{j_m}(B\equiv C)$．よってDR 5を使うと，$\vdash A\equiv A'$を得る．　2) 1)より明らか．　□

この置きかえの定理を使うと簡単に証明できる定理の例として，次のT 21，T 22を記しておこう．

T 21　$\neg\forall x_i A\equiv\exists x_i\neg A$

T 22　$\forall x_i A\equiv\neg\exists x_i\neg A$

T 21の証明　(1)　$A\equiv\neg\neg A$　　定理

(2)　$\neg\forall x_i A\equiv\neg\forall x_i\neg\neg A$　　(1)DR6

(3)　$\neg\forall x_i A\equiv\exists x_i\neg A$　　(2)∃の定義　□

最後に，後でも使うことになる束縛変項の変更と呼ばれるDRを見ておこう．しかしそのためには「相似」(similar)ということを定義しておく必要がある．

定義　Bx_jとBx_iは相似である $\underset{\text{df}}{\Leftrightarrow}$ x_jはBx_iのx_iに対して自由であり，かつx_jはBx_iに自由変項として現われていない．

注意　Bx_iとBx_jが相似であるとは，大雑把にいえば，Bx_iのx_iのところがx_jになっていることといえる．

すると直ちに次の事柄が成立する．

DR 7　Ax_iとAx_jが相似であるなら，

$$\vdash\forall x_i Ax_i\equiv\forall x_j Ax_j.$$

証明　(1)　$\forall x_i Ax_i\supset Ax_j$　　A 4

(2)　$\forall x_j(\forall x_i Ax_i\supset Ax_j)$　　(1)Gen

(3)　$\forall x_j(\forall x_i Ax_i\supset Ax_j)\supset(\forall x_i Ax_i\supset\forall x_j Ax_j)$　　A 5

(4)　$\forall x_i Ax_i\supset\forall x_j Ax_j$　　(2)(3)MP

逆も同様に. □

DR 8(束縛変項の変更) $\forall x_i Bx_i$ を A の部分式，また Bx_j を Bx_i と相似な式とする．さらに A' を，A の $\forall x_i Bx_i$ が現われているところ(1 個所以上の)を $\forall x_j Bx_j$ で置きかえた式とする．以上のとき，

$$\vdash A \equiv A'$$

が成立する.

証明 上の DR 7 と置きかえの定理より明らか. □

§3.3 理 論 K

この節では，ある分野についての命題群を述語論理的な立場から記号化し，しかもそれらを，前節で例示した述語論理の公理系 L と下に示すように融合したかたちで公理化した，いわゆる「第一階の理論」(first order theory) あるいは単に「理論」(theory) と呼ばれる体系(以下それを K で表わす)を取り上げる.

理論 K の言語と公理

理論 K についても，当然のことながら，そこに登場する記号の明示と，それらを素材にして形成される各種の表現形態の定義がまず与えられる．すなわち理論 K の「言語」の提示であり，論理記号以外に，問題となっている分野で基本となる固有の述語記号，固有の関数記号，固有の個体常項など，理論 K の記号の明示と，それらをもとに形成される項，要素式，論理式など，理論 K の表現の定義が与えられる(なお具体的には後に示す例を見よ).

次に理論 K の公理であるが，これは 2 種類に分けられる．1 つは「固有公理」(proper axioms) といわれるもので，理論 K に固有な述語，関数，個体常項についての公理であり，理論 K を性格づける公理である．したがってそれは理論ごとに異なっているものである．なお以下では固有公理となる式はすべて閉じた式となっているものとし，K 1, K 2, … というように表わすことにする．また残りのもう 1 つは，「論理公理」(logical axioms) であり，すでに前節で示した A 1〜A 5 の 5 つの公理である．あるいはもう少し正確にいえば，それら 5

つの公理が理論 K に現われる表現に適用された限りのものである.

さらにまた理論 K でも，その定理を引き出していく推論規則が必要となる.しかしこれについては前節で示した 2 つの規則，すなわち MP と Gen が理論 K の推論規則となる．なおこれらについても正確にいえば，理論 K の表現に適用される限りのものである.

Kでの証明と演繹

さて理論Kの公理と推論規則が上のように与えられると，論理の公理系の場合と同様，K での証明や K での前提からの演繹ということを，はっきり定義することができる.

定義　下記の条件(♯)を満たす K の論理式からなる有限個の列 $B_1, B_2, \cdots B_m$ $(=C)$のことを，C の K での「証明」といい，C の K での証明が存在するとき，C は K の「定理」である，という.

(♯)　B_i(ただし $1 \leq i \leq m$)は，i) K の固有公理の 1 つであるか，または ii) 論理公理の 1 つであるか，または iii) B_i に先行する B_j, B_k(ただし $j, k < i$)から MP によって引き出された式であるか，または iv) B_i に先行する B_j から Gen によって引き出された式である.

なお，C が K の定理であることを，$\vdash_K C$ と表わすことにする.

注意　理論 K ということは，上の定義を使っていえば，K の定理となる式の集合である，といってみることができる.

定義　下記の条件(♯♯)を満たす論理式からなる有限個の列 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ $(=C)$のことを，前提 Γ(任意個の K の式から成る集合，また開いた式を含んでもよい)から C への K での「演繹」という．そしてそうした演繹が存在するとき，C は Γ から K で「演繹可能」であるといい，$\Gamma \vdash_K C$と表わす.

(♯♯)　B_i(ただし $1 \leq i \leq m$)は，i) K の固有公理の 1 つであるか，または ii) 論理公理の 1 つであるか，または iii) Γ に属する 1 つの式であるか，または iv) B_i に先行する B_j, B_k(ただし $j, k < i$)から MP によって引き出された式であるか，または v) B_i に先行する B_j から Gen によって引き出された式である．ただし v) の場合，B_j に現われ，しかも Gen が適用されることになる自由変項は，B_j が得られるもとになる前提 Γ の諸式(論理公理，論理的定理とな

る式は除く)において自由変項であってはならない.

注意 論理的定理とは，論理公理のみから得られる式のことである.

以上が K での証明および K での演繹の定義であるが，L での証明および L での演繹の定義と比べるとき，次のような関係が成立することは明らかであろう.

1) $\vdash_K C \Leftrightarrow \{\mathrm{K}\} \vdash_L C$.

2) $\Gamma \vdash_K C \Leftrightarrow \Gamma, \{\mathrm{K}\} \vdash_L C$.

ただし {K} で，K の固有公理の列 K 1, K 2, K 3, … を表わすことにする.

理 論 の 例

次にごく簡単な理論の例を挙げておこう.

例 1 論理の公理系 L. L 自身最も簡単な理論の例といえる．すなわちそれは，$P_1, P_2, \cdots; f_1, f_2, \cdots; a_1, a_2, \cdots; x_1, x_2, \cdots$ といった無限個の記号と，それらをもとに定義される論理式などの表現をその言語としている理論であり，また公理についていえば，固有公理を全くもっていない理論といえる.

例 2 等号を伴った述語論理の公理系 $L^=$. これも簡単な理論の例である．すなわちそれは，L の記号に＝なる 2 項述語が加わり，それに伴って $=ts$ (i.e. $t=s$) が要素式として加わり，したがってまたその論理式もそれを含んだかたちのものとなった言語からなっている．そしてその固有公理は次の 3 つである.

L⁼1 $\forall x_i(x_i = x_i)$ **L⁼2** $\forall x_{l_1} \cdots \forall x_{l_n}((x_i = x_j \wedge Ax_i) \supset Ax_j)$

L⁼3 $\forall x_{l_1} \cdots \forall x_{l_n}(x_i = x_j \supset f_k(\cdots, x_i, \cdots) = f_k(\cdots, x_j, \cdots))$

注意 x_i, x_j は $x_{l_1}, \cdots, x_{l_n}$ に含まれているとする．また条件などについては p.68 参照.

例 3 自然数の公理系 N. まず N の言語と公理を記し，続いて簡単な定理も 1 つ添えておこう.

N の言語 1) N の基本記号(論理記号以外の) i) 述語記号：＝. ii) 関数記号：$'$, ＋, ・. iii) 個体常項：0.

2) N の項の定義 i) 0 は項である. ii) x_i は項である. iii) t, s を N の項とすると，t', $t+s$, $t \cdot s$ は各々 N の項である. iv) i)～iii) で項となるもののみが N の項である.

3) N の論理式の定義 i) $t=s$ は論理式である．ただし t, s は N の項とする.

ii) A, B を N の論理式とすると，$(A) \supset (B), \neg(A), \forall x_i(A)$ は各々 N の論理式である．iii) i), ii) によって論理式となるもののみが N の論理式である．

注意　括弧の省略などについては§2.1の定義と同様にする．

N の論理公理と推論規則　L と同じゆえ省略．

N の固有公理　次のＮ１〜Ｎ９からなる．

N 1　$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 = x_2 \supset (x_1 = x_3 \supset x_2 = x_3))$

N 2　$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 = x_2 \supset x_1' = x_2')$

N 3　$\forall x_1 \neg (0 = x_1')$

N 4　$\forall x_1 \forall x_2 (x_1' = x_2' \supset x_1 = x_2)$

N 5　$\forall x_1 (x_1 + 0 = x_1)$

N 6　$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)')$

N 7　$\forall x_1 (x_1 \cdot 0 = 0)$

N 8　$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \cdot x_2' = (x_1 \cdot x_2) + x_1)$

N 9　N の任意の論理式 Ax_i について，

$$A0 \supset (\forall x_i (Ax_i \supset Ax_i') \supset \forall x_i Ax_i).$$

注意　参考のためＮ１〜Ｎ９について簡単なコメントを添えておく．Ｎ１, Ｎ２は＝という述語が等号であることを表わしている．すなわちＮ１は $=x_3$ なる述語に関しての代入可能性を，Ｎ２は $'$ なる関数に関しての代入可能性を表わしている．なお等号についての残りの基本的性質である $\forall x_1(x_1 = x_1)$ や ＋, ・に関しての代入可能性は，N では定理として引き出されてくる．Ｎ３, Ｎ４は，$'$ なる関数がある数の次の数を対応させる関数であることを表わしている．Ｎ５, Ｎ６は＋が加法であること，Ｎ７, Ｎ８は・が乗法であることを表わしている．Ｎ９は，いわゆる数学的帰納法の原理を表わしている．なおこれらの公理は，ペアノ Peano によって公表された公理を土台に，デデキント Dedekind によって与えられたものである．ペアノの公理をそのまま形式化すると第一階の理論の範囲を超えてしまう．

N の定理の例　$\vdash_N \forall x_1 (x_1 = x_1)$

証明　(1)　$\forall x_1 (x_1 + 0 = x_1)$　　N 5

(2)　$x_1 + 0 = x_1$　　(1)A4MP

(3)　$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 = x_2 \supset (x_1 = x_3 \supset x_2 = x_3))$　　N 1

(4)　$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 = x_2 \supset (x_1 = x_3 \supset x_2 = x_3)) \supset (x_1 + 0 = x_1$
$\supset (x_1 + 0 = x_1 \supset x_1 = x_1))$　　A 4

(5) $x_1+0=x_1\supset(x_1+0=x_1\supset x_1=x_1)$ (3)(4)MP

(6) $x_1=x_1$ (2)(5)MP

(7) $\forall x_1(x_1=x_1)$ (6)Gen □

問 $\vdash_N\forall x_1\forall x_2\forall x_3(x_1=x_2\supset(x_1+x_3=x_2+x_3))$を証明せよ．（ヒント）数学的帰納法N 9を使う．

◇ ラッセルのパラドックスと *ZF*

理論の例として集合論の公理系ZFにも簡単に言及しておこう．しかしその前に，こうした集合論の公理化のきっかけともなったラッセルのパラドックス(Russell's paradox)について，まず触れておく．

ラッセルのパラドックス 19世紀末，数や関数をはじめ数学の諸概念は，最終的には集合概念によって構成される，という考え方が生れた．これは，多様化しつつあった数学にも全数学が共通してもとづく基盤があり，それが集合論である，という考え方で，画期的であった．しかしラッセルは，この集合論が矛盾を含んだものであることを，下に述べる簡単な議論によって指摘した．

まずカントールCantor的な集合論においては，次のことが当然のこととして認められていることに注意する．

1) 任意の述語(あるいは性質)Aについて，Aには必ずそれに対応する集合(i.e. ものの集り)が存在する．すなわち任意のAに対して，$\{x:Ax\}$なる集合が存在する．

2) あるものがAであることと，そのあるものがAに対応する集合の要素となることとは同値である．すなわち$Az\equiv z\in\{x:Ax\}$．

さてその上で次に，任意の集合aについては，$a\in a$または$\neg(a\in a)$のどちらかであるが，いまaとして$\{x:\neg(x\in x)\}$なる集合を考えてみる．すなわち1)のAを，「自分自身を要素としない」としたとき，1)によって考えられる集合をaとしてみる．そしてこのようなaが，$a\in a$…(1)であるか，$\neg(a\in a)$…(2)であるかを改めて考えてみる．aはそのどちらかなはずであり，まずは(1)と仮定してみる．すると，

$$a\in a\equiv a\in\{x:\neg(x\in x)\}\qquad(a\text{の定義より})$$
$$\equiv\neg(a\in a)\qquad(\text{上の 2)により})$$

となり，直ちに矛盾が生ずる．そこで次に(2)と仮定してみる．すると，

$$\neg(a\in a)\equiv\neg(a\in\{x:\neg(x\in x)\})\qquad(a\text{の定義より})$$
$$\equiv\neg(\neg(a\in a))\qquad(\text{上の 2)により})$$
$$\equiv a\in a\qquad(\text{二重否定})$$

となり，これまた直ちに矛盾が生ずる．つまり，任意の述語Aの１つとして，上記した

性質を当ててみると，どうしようもない矛盾が容易に引き出されてしまうのである．

注意 上の議論は次のようにも表わされる．まず上の 1)，2)は，「抽象(あるいは把捉)の公理」と呼ばれる $\exists y\forall x(x\in y\equiv Ax)$で表わされる．そして Ax として $\neg(x\in x)$を考える．すると，

(1)	$\exists y\forall x(x\in y\equiv\neg(x\in x))$	公理
(2)	$\forall x(x\in\alpha\equiv\neg(x\in x))$	(1)EI
(3)	$\alpha\in\alpha\equiv\neg(\alpha\in\alpha)$	(2)UI

となり，$\exists y\forall x(x\in y\equiv Ax)$なる集合概念が矛盾を含んでいることが示される．

公理的集合論 ZF さてこのように集合論すなわち数学の基盤に矛盾が発見されたことから(「数学の危機」と呼ばれた時期もあったが)，改めて矛盾を含まないような集合論の再構成が試みられるようになった(と同時に，各種の数学的な体系の無矛盾性の検討などが問題となり，論理学的な問題意識が一時多くの人々の心を捉えたのである)．そして実際，集合論は論理学での推理論の成果をふまえて，より緻密な体系につくり上げられた．ZF もそうした体系の 1 つであり，しかも第 1 階の理論の例にもなるように構成されている．

注意 i) なお論理学と融合したかたちで公理化された集合論は，「公理的集合論」(axiomatic set theory)と呼ばれる．それに対して，再構成される以前のカントール的な集合論は，「素朴集合論」(naive set theory)と呼ばれることがある． ii) ZF はツェルメロ Zermelo の体系をフレンケル Fraenkel が改良した体系である．ZF の他にも，NBG(ノイマン Neumann-ベルナイス Bernays-ゲーデル Gödel)と呼ばれる有名な公理系がある．

まず登場する記号であるが，これは論理記号(＝も含める)および 2 項述語 $\in$ である．よってこの体系での要素式は，$x\in y$，$x=y$ の形となる．次に公理であるが，論理公理および ＝ の公理はすでに現われたものとする．つまり ZF は等号を伴った述語論理の公理系と融合したかたちで構成される．また ZF の固有公理については下に順次記していく．なお念のため注意しておくと，ZF に現われる変項はすべて「集合」(set)である(i.e. 各々の集合が述語論理での個体に相当する)．

ZF 1 $\forall x\forall y\forall z((z\in x\equiv z\in y)\supset x=y)$ （「外延性の公理」）

注意 これは 2 つの集合 x,y が等しいことを，$x=y\equiv\forall z(z\in x\equiv z\in y)$ とするために必要．なお公理の逆に当る式は＝の代入可能性の公理より得られる．

ZF 2 $\forall x\exists y\forall z(z\in y\equiv z\in x\wedge Az)$ （「分離の公理」）

注意 ただし Az は ZF の論理式である．つまりこの公理によって，述語 A に対応した集合 y の存在が主張されている．しかし抽象の公理とは異なり，それは集合 x の一部分となるように制限されている．これによって先のパラドックスも避けられる(後述)．

ZF 3 $\forall x\forall y\exists z\forall w(w\in z\equiv(w=x\vee w=y))$ （「対の公理」）

注意 これは2つの集合 x, y からなる対がまた集合であることを主張している．なお x, y からなる対は，$\{x, y\}$ で表わされる．

ZF 4 $\forall x \exists y \forall z (z \in y \equiv \exists w (z \in w \wedge w \in x))$ （「和の公理」）

注意 これは集合 x に属する集合をすべて合併したものがまた集合であることを主張している．なお x から得られるこの集合は x の和と呼ばれ，$\cup x$ で表わされる．

ZF 5 $\forall x \exists y \forall z (z \in y \equiv z \subseteq x)$ （「巾集合の公理」）

注意 これは集合 x のすべての部分集合を要素とするものがまた集合であることを主張している．このような x の部分集合の集合は x の巾集合と呼ばれ，$\mathcal{P}x$ で表わされる．なお部分集合の関係 $\subseteq$ は，$x \subseteq y \equiv \forall z (z \in x \supset z \in y)$ と定義される．

ZF 6 $\exists x \forall y \neg (y \in x)$ （「空集合の公理」）

注意 これはいかなる集合をも要素としない集合すなわち空集合の存在を主張している．しかもこの空集合は一意的に決ることから，それは ϕ で表わされる．

ZF 7 $\forall x \exists y (x = \phi \vee (y \in x \wedge \forall z (z \in x \supset \neg (z \in y))))$ （「正則性の公理」）

注意 内容のおおよそをいえば，x が空集合でないなら，x と y との共通部分が空集合 ϕ となるような x の要素 y が存在する，ことを主張している．つまりこの公理は，$\in$ に関して無限の下降列が存在することを否定する．そこで「基礎の公理」と呼ばれることもある．

ZF 8 $\exists x (\phi \in x \wedge \forall y (y \in x \supset (y \cup \{y\}) \in x))$ （「無限の公理」）

注意 ここで $\{y\}$ は y のみを要素とする集合で，$\{y, y\}$ として定義される．公理の内容は，$\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}, \cdots$ を要素とする集合の存在を主張している．なお ZF では，ϕ を 0，$\{\phi\}$ を 1，$\{\phi, \{\phi\}\}$ を 2，$\cdots$ と考える．すると $1 = \{0\}$，$2 = \{0, 1\}$，$3 = \{0, 1, 2\}, \cdots$ となり，公理は結局 $\{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \ldots\}$（これを ω で表わす，すなわち ω は自然数の集合である）をはじめとする無限集合の存在を主張しているといえる．

ZF 9 $\forall u (\forall x \forall y \forall z ((x \in u \wedge Axy \wedge Axz) \supset y = z) \supset$

$\exists v \forall y (y \in v \equiv \exists x (x \in u \wedge Axy)))$ （「置きかえの公理」）

注意 公理の前件部分では，A が u を変域とする関数（i.e. 一意的関係）であることが表わされている．したがってこの公理は，A の変域 u が集合であるとき，A の値域 v も集合となることを主張している．実際この公理によって，$\omega + \omega$ などが集合であることが保証されるのである．

以上が ZF の核となる公理群である．そしてこれらをもとにして，自然数をはじめ実数なども構成される．しかし集合論の公理としてはさらに選択公理 AC と連続体仮説 CH が考えられるのが普通である．ただ AC, CH を正式に定式化するには少々準備が必要となる．そこでここでは非公式な形で参考までに添えておく．

注意 AC は Axiom of Choice の略．CH は Continuum Hypothesis の略．

AC x が空でない集合であるとき，y が x の空でない部分集合なら $f(y) \in y$ である，という条件を満たす関数 f が存在する．

もう1つのCHは，自然数の濃度(あるいは基数)$\aleph_0$の次に大なる濃度を$\aleph_1$とするとき，次の関係が成立することを主張する．

CH $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$

注意 $2^{\aleph_0}$が実数の濃度であることは証明できる．よってCHは，自然数の濃度より大きな濃度が実数のそれであり，両者の中間に相当する濃度が存在しないことを表わしている．

パラドックスの回避 以上で集合論ZFの公理を一通りながめてみた．そしてそこでは，矛盾が忍び込むことのないように，集合のサイズがつねに注意され，その上で種々の集合の存在などが主張されているのを見た．ところでそれでは，こうした公理化のきっかけとなったラッセルのパラドックスは，この公理系ではどのように回避されることになっているのであろうか．まず，ZF 7 (正則性の公理)から，次の定理Tが得られることを見ておこう．

T $\forall x \neg(x \in x)$

証明 $x=\phi$のときはTは明らかゆえ，$x \neq \phi$とする．その上で$x \in x$…(1)と仮定する(背理法)．すると明らかに$x \in \{x\}$…(2)ゆえ，(1), (2)より$x \in x \cap \{x\}$．よって$x \cap \{x\} \neq \phi$…(3)．ところでZF 7は，$x \neq \phi \supset \exists y(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in x \wedge z \in y))$と変形され，さらに$x \neq \phi \supset \exists y(y \in x \wedge x \cap y = \phi)$…(4)となる．ここで(4)の$x$として$\{x\}$を考えてみると，$\exists y(y \in \{x\} \wedge \{x\} \cap y = \phi)$，すなわち$\{x\} \cap y = \phi$で$\{x\}$の要素となる$y$が存在する，ことがいえる．すると$\{x\}$は$x$のみを要素としているゆえ，$x=y$と考えられ，結局$\{x\} \cap x = \phi$…(5)を得る．しかしこれは(3)と矛盾する．よって$x \neq \phi$のときも，$x \in x$ではない．つまりすべてのxについて，$x \in x$ではない． □

次に抽象の公理に代って，それに相当するZF 2 (分離の公理)に注目し，パラドックスを得たときと同様の議論を考えてみる．すなわちAxを$\neg(x \in x)$としてみる．すると$\exists y \forall x(x \in y \equiv x \in z \wedge \neg(x \in x))$であり，よって$\forall x(x \in \alpha \equiv x \in z \wedge \neg(x \in x))$を得る．ここで$x$を$\alpha$とすると，

$$\alpha \in \alpha \equiv \alpha \in z \wedge \neg(\alpha \in \alpha) \qquad (*)$$

となる．しかし上に示した定理Tにより，$\neg(\alpha \in \alpha)$であり，(*)の左辺は偽，また(*)の右辺もつねに真ではなく，(*)はもはや矛盾した式ではないのである．

§3.4 ゲンツェン流の公理系 L_G

この節では，§3.1,§3.2で例示されたヒルベルト流の論理の公理系とは異なる，ゲンツェン Gentzen 流の公理系を取り上げる．2つのスタイルの大きな違

いは，前者がすでに見たように，公理，定理とも各々論理式であるのに対し，後者が下に述べるように，公理，定理とも各々推論式になっているところにある．すなわちヒルベルト流の公理系が，無限個の妥当式の把握をめざす体系であるのに対し，ゲンツェン流の公理系は，無限個の正しい推論式の把握をめざす体系である，ともいえる．とにかくさっそくゲンツェン流の論理の公理系の1つを(以下それをL_Gで表わす)例示しよう．

公理系 L_G の公理と推論規則

まずその公理と推論規則を掲げる．ただし，各々の記号ごとにまとめたかたちで示すので，推論規則に相当するものには，念のため＊印を付けておく．

公理 I (→ についての公理)

1)　$A_1, \cdots, A_n \to A_i$　(ただし $1 \leq i \leq n$)．

2)*　$A_1, \cdots, A_n \to B_1$ かつ $A_1, \cdots, A_n \to B_2$ かつ …かつ $A_1, \cdots, A_n \to B_m$ であり，しかも $B_1, \cdots, B_m \to C$ であるなら，$A_1, \cdots, A_n \to C$ である．

注意　i) 1)の最も簡単な場合は $A \to A$ である．ii) 2)の推論規則は「カット」(cut)と呼ばれる．これは $B_1, \cdots, B_m$ が $A_1, \cdots, A_n$ と C を中継しているからである．また 2)の最も簡単な場合は，$A \to B$ かつ $B \to C$ なら $A \to C$ である．

公理 II ($\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\neg$ についての公理)

	導入(introduction)	除去(elimination)
$\wedge$	$A, B \to A \wedge B$	i)　$A \wedge B \to A$ ii)　$A \wedge B \to B$
$\vee$	i)　$A \to A \vee B$ ii)　$B \to A \vee B$	$\Gamma, A \to C$ かつ $\Gamma, B \to C$ なら $\Gamma, A \vee B \to C$　＊
$\supset$	$\Gamma, A \to B$ なら $\Gamma \to A \supset B$　＊	$A, A \supset B \to B$
$\neg$	$\Gamma, A \to D \wedge \neg D$ なら $\Gamma \to \neg A$　＊	1)　$D \wedge \neg D \to B$ 2)　$\neg\neg A \to A$

ただし表中の Γ は，$A_1, \cdots, A_n$ なる論理式の列を表わす．

注意　i) 左側の公理が導入と呼ばれるのは，結論部分 (i.e. →の右側) に各々の記号が

導入されてきているからである．右側の公理が除去と呼ばれるのは，前提部分(i.e.→の左側)にあった記号が結論部分では除かれているからである． ii) ¬の除去の 2)を除いた体系は「直観主義の論理」(intuitionistic logic)と呼ばれる．この論理では排中律なども認められなくなる．iii) $A\equiv B$ なる関係にある A と B を同一のものとみなした上で，公理 I, II および次の III の諸式をながめてみる．するとそれらは，→が半順序関係に，また ∧, ∨, ⊃, ¬, ∀, ∃ の各々が，束の演算である交わり，結び，相対擬補元，補元，無限交わり，無限結びに対応してくることを示している(§5.1, §5.4, §5.5参照)．

公理 III (∀, ∃ についての公理)

	導　入	除　去
∀	$\Gamma\to Ax_i$ なら $\Gamma\to\forall x_i Ax_i$ *	$\forall x_i Ax_i\to At$
∃	$At\to\exists x_i Ax_i$	$\Gamma, Ax_i\to C$ なら $\Gamma, \exists x_i Ax_i\to C$ *

ただし，1) t は項であり，また t は Ax_i の x_i に対して自由である，とする．2) Γ は$A_1, \cdots, A_n$ なる論理式の列であり，また Γ, C には x_i は自由変項として現われていない，とする．

注意　公理 III を除き，しかも A, B, C etc. の論理式を命題論理の論理式に制限すると，それは命題論理の公理系となる．

L_G の定理—その1—

さて以上の公理(正確には公理図式である)のいくつかを組み合せていくとき，新しい推論式(正確には推論式の図式)が限りなく構成されてくる．そしてこうして構成されてくる推論式を L_G の「定理」(正確には定理図式)といい，その構成過程を L_G での「証明」という．以下ではまず，公理 I，公理 II の範囲で得られる定理のいくつかを，例示してみよう．

定理の例 1　$\neg(A\vee B)\to\neg A\wedge\neg B$

証明　(1)　$\neg(A\vee B), A\to A$　　公理 I の 1)

(2)　$\neg(A\vee B), A\to\neg(A\vee B)$　　公理 I の 1)

(3)　$A\to A\vee B$　　∨の intro.

(4)　$\neg(A\vee B), A\to A\vee B$　　(1)(3)cut

(5) $A \lor B, \neg(A \lor B) \to (A \lor B) \land \neg(A \lor B)$ ∧のintro.

(6) $\neg(A \lor B), A \to (A \lor B) \land \neg(A \lor B)$ (2)(4)(5)cut

(7) $\neg(A \lor B) \to \neg A$ (6)¬の intro.

(8) $\neg(A \lor B), B \to B$

⋮ (1)〜(7)と同様に.

(13) $\neg(A \lor B) \to \neg B$

(14) $\neg A, \neg B \to \neg A \land \neg B$ ∧の intro.

(15) $\neg(A \lor B) \to \neg A \land \neg B$ (7)(13)(14)cut □

この例からもわかるように，L_G での証明は公理系 L での証明よりやさしい．というのは，証明しようとする式(定理)の構造から逆にその証明の方針も立てられるからである．つまり例1の場合，→の右側は $\neg A \land \neg B$ であり，したがって ¬ の導入を使って $\neg A, \neg B$ を引き出し，その上で ∧ の導入を使って両者を結びつければよいことが分かる．次にこの ¬ の導入を使うためには，$\neg(A \lor B)$ に A を加えた前提から $D \land \neg D$(矛盾)を引き出そうとする試みが，まず必要であることも分かる．そして上の証明は実際そこから始められている．

定理の例2 $\neg A, A \lor B \to B$

証明 (1) $\neg A, B \to B$ 公理Iの1)

(2) $\neg A, A \to A \land \neg A$ ∧の intro.

(3) $A \land \neg A \to B$ ¬のelimi. 1)

(4) $\neg A, A \to B$ (2)(3)cut.

(5) $\neg A, A \lor B \to B$ (1)(4)∨の elimi. □

注意 この例では，定理の右側の∨が除去されていることから，∨-除去を使えばよいという方針が立つ．

定理の例3 $A \land (B \lor C) \to (A \land B) \lor (A \land C)$

証明 (1) $A \land (B \lor C), B \to A \land (B \lor C)$ 公理Iの1)

(2) $A \land (B \lor C) \to A$ ∧の elimi.

(3) $A \land (B \lor C), B \to A$ (1)(2)cut

(4) $A \land (B \lor C), B \to B$ 公理Iの1)

(5) $A, B \to A \land B$ ∧の intro.

(6) $A \land (B \lor C), B \to A \land B$ (3)(4)(5)cut

(7)　$A\wedge B \to (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$　$\vee$の intro.

(8)　$A\wedge(B\vee C), B \to (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$　(6)(7)cut

(9)　$A\wedge(B\vee C), C \to A\wedge(B\vee C)$

　　⋮　　(1)～(8)と同様に.

(16)　$A\wedge(B\vee C), C \to (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$

(17)　$A\wedge(B\vee C), B\vee C \to (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$　(8)(16)$\vee$の elimi.

(18)　$A\wedge(B\vee C) \to B\vee C$　$\wedge$の elimi.

(19)　$A\wedge(B\vee C) \to A\wedge(B\vee C)$　公理 I の 1)

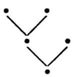
(20)　$A\wedge(B\vee C) \to (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$　(17)(18)(19)cut　□

注意　この例では前提 $A\wedge(B\vee C)$ から A と $B\vee C$ が直ち出てくるにもかかわらず，$B\vee C$ が結論では現われていないことから，$\vee$ の除去を中心にして証明を考えればよい，という方針が立つ.

なお，例 1 についての説明および例 2，例 3 の注意で述べた点は，先に掲げた公理のうち＊印を付けたものについて，そこに現われる「ならば」の前半と後半を横線を引いて区別するかたちにし，たとえば例 2 の証明を次のような書式で描くとき，よりはっきりしてくる．と同時にこの書式では各式の連関が木構造で表わされ，その連関は一見して明らかとなる．またこのような書式で書かれた証明は「証明図」(proof figure) と呼ばれる.

$$\dfrac{\dfrac{\neg A, A \to A\wedge\neg A \qquad A\wedge\neg A \to B}{\neg A, A \to B}\,\text{cut} \qquad \neg A, B \to B}{\neg A, A\vee B \to B}\,\vee\text{-elimi.}$$

左の木構造



問　次の各式を証明せよ．　1) $\neg A\wedge\neg B \to \neg(A\vee B)$　2) $(A\wedge B)\vee(A\wedge C) \to A\wedge(B\vee C)$　3) $\neg A\vee B \to A\supset B$　4) $A\supset B \to \neg A\vee B$　5) $\neg(A\wedge B) \to \neg A\vee\neg B$　6) $\neg A\vee\neg B \to \neg(A\wedge B)$

注意　問の 4), 5) は $\neg$ の除去の 2) (i.e. $\neg\neg A \to A$) を必要とする．よって公理 II の注意で触れた直観主義の論理では，それらは承認されない式となる.

L_G の定理―その 2―

次に公理 III をも含めた範囲の定理を例示しておこう.

定理の例 4　$\exists x_i \forall x_j A x_i x_j \to \forall x_j \exists x_i A x_i x_j$

証明　(1)　$\forall x_j A x_i x_j \to A x_i x_j$　$\forall$の elimi.

(2)　$Ax_ix_j \to \exists x_iAx_ix_j$ 　　∃の intro.

(3)　$\forall x_jAx_ix_j \to \exists x_iAx_ix_j$ 　　(1)(2)cut

(4)　$\exists x_i\forall x_jAx_ix_j \to \exists x_iAx_ix_j$ 　　(3)∃の elimi.

(5)　$\exists x_i\forall x_jAx_ix_j \to \forall x_j\exists x_iAx_ix_j$ 　　(4)∀の intro. □

注意　(3)式の結論部分 $\exists x_iAx_ix_j$ では x_i は自由変項として現われていないゆえ，∃-除去の適用が可能となる．

定理の例 5　$\exists x_i(Ax_i\wedge Bx_i) \to \exists x_iAx_i\wedge\exists x_iBx_i$

証明　(1)　$Ax_i\wedge Bx_i \to Ax_i$ 　　∧の elimi.

(2)　$Ax_i \to \exists x_iAx_i$ 　　∃の intro.

(3)　$Ax_i\wedge Bx_i \to \exists x_iAx_i$ 　　(1)(2)cut

(4)　$\exists x_i(Ax_i\wedge Bx_i) \to \exists x_iAx_i$ 　　(3)∃の elimi.

(5)　$Ax_i \wedge Bx_i \to Bx_i$

⋮　　(1)～(4)と同様に．

(8)　$\exists x_i(Ax_i\wedge Bx_i) \to \exists x_iBx_i$

(9)　$\exists x_iAx_i, \exists x_iBx_i \to \exists x_iAx_i\wedge\exists x_iBx_i$ 　　∧の intro.

(10)　$\exists x_i(Ax_i\wedge Bx_i) \to \exists x_iAx_i\wedge\exists x_iBx_i$ 　　(4)(8)(9) cut □

定理の例 6　$\forall x_i\neg Ax_i \to \neg\exists x_iAx_i$

証明　(1)　$\forall x_i\neg Ax_i, Ax_i \to \forall x_i\neg Ax_i$ 　　公理 I の 1)

(2)　$\forall x_i\neg Ax_i \to \neg Ax_i$ 　　∀の elimi.

(3)　$\neg Ax_i \to \neg Ax_i\vee(D\wedge\neg D)$ 　　∨の intro.

(4)　$\neg Ax_i\vee(D\wedge\neg D) \to Ax_i\supset(D\wedge\neg D)$ 　　p. 97 の問 3)

(5)　$\forall x_i\neg Ax_i, Ax_i \to Ax_i\supset(D\wedge\neg D)$ 　　(1)(2)(3)(4) cut 2 回

(6)　$\forall x_i\neg Ax_i, Ax_i \to Ax_i$ 　　公理 I の 1)

(7)　$Ax_i, Ax_i\supset(D\wedge\neg D) \to D\wedge\neg D$ 　　⊃の elimi.

(8)　$\forall x_i\neg Ax_i, Ax_i \to D\wedge\neg D$ 　　(5)(6)(7)cut

(9)　$\forall x_i\neg Ax_i, \exists x_iAx_i \to D\wedge\neg D$ 　　(8)∃の elimi.

(10)　$\forall x_i\neg Ax_i \to \neg\exists x_iAx_i$ 　　¬の intro. □

注意　(3)に登場する $D\wedge\neg D$ には，x_i は自由変項として現われていないとする．

問　次の式を証明せよ．1)　$\forall x_iAx_i\vee\forall x_iBx_i\to\forall x_i(Ax_i\vee Bx_i)$　2)　$\forall x(Px\supset Qx), \exists x(Px\wedge Rx)\to\exists x(Qx\wedge Rx)$

第４章　完全性定理

前章でながめた論理をはじめとする種々の公理系は，その目ざすところを本当に実現するであろうか．少なくとも論理の公理系については，その答は肯定的であり，この点を示すことが本章の課題である．はじめの§4.1では，公理化の目ざすところから考えて，一般に公理系に当然要求される事柄が，無矛盾性，完全性，公理相互の独立性と呼ばれる３つの条件にまとめられることを，まず説明する．続く§4.2では，公理系Lがこれらの条件を満たすことを示すために，その準備として論理式への意味づけ（解釈）の問題を，改めてより正式に取り上げる．そして§4.3で，Lの無矛盾性と完全性の証明を実際に行なう．しかしその完全性の証明の方は，論理をはじめ第１階の理論にとってより基本的な定理であるヘンキンの定理を前提にする．そこで§4.4において，この定理の証明を，比較的丁寧に述べてみる．なお独立性については，章末に補遺のかたちで言及する．

§4.1　公理系に要求される条件

この節では，公理系にその本来の意図から考えて当然要求される３つの条件，「無矛盾性」(consistency)，「完全性」(completeness)，「公理相互の独立性」(independence)について述べておこう．

無 矛 盾 性

定義　ある公理系が「無矛盾」(consistent)であるとは，その公理系の論理式Aと$\neg A$がともにその公理系の定理となることがないことである．

注意　無矛盾性という概念は，上に見るように定理ということで定義されており，構文論的な概念である．この点，念のため注意しておく．

いまこの条件が満たされないとしてみる．すなわち A と $\neg A$ とがともに定理としてみる．すると $\neg A \supset (A \supset B)$ が論理の公理系の定理であることから，MPを2回使うことによって，論理式 B を得る．ここで B は任意の論理式といえるゆえ，結局 $A, \neg A$ が定理であるとすると，任意の式が定理になるといえる．つまり矛盾した公理系ではすべての式が定理となり，もはやそれは知識の体系として無意味なものとなってしまうのである．それゆえ無矛盾性という条件は，公理系である以上，いかなる公理系に対しても，是非とも満たされることが要求される条件である．

なおいま述べたところに注目して，次のような定義がなされることもある．

定義 ある公理系が無矛盾であるとは，その公理系の論理式でありながら，しかもその公理系の定理とはならないものが，少なくとも1つ存在することである．

注意 厳密には，この定義ははじめの定義と完全に一致するものではない．A に対して $\neg A$ が必ず存在し，また $\neg A, A$ から B が導出できるとき，両者は一致する．なおはじめの方を「単純無矛盾性」(simple consistency)，後の方を「絶対無矛盾性」(absolute consistency) と，区別して呼ぶこともある．

さてそれでは，論理の公理系は，たとえば前章に例示した体系 L は無矛盾であろうか．答は肯定的である．しかも後に(§4.3の定理3.1)示すように，それは容易に証明できる．しかし一方で論理を除いた他の公理系については，その無矛盾性の証明は，必ずしもやさしいことではないことが知られている．

参考 実際ゲーデルは，自然数の公理系をはじめ，一般の公理系について，その無矛盾性の証明は，その体系よりいわば豊かな立場に立ってのみ可能であることを明らかにしているのである(いわゆる「ゲーデルの第2不完全性定理」(1931年)，付録参照)．したがって全数学の基礎となる集合論の体系について，是非その無矛盾性の証明を与えたいのであるが，それはもはや集合論の枠の中では不可能なのである．この点ゲーデル自身が，AC, CH の無矛盾性を証明している場合も，それは ZF の無矛盾性を前提にした上でのいわゆる「相対的無矛盾性」の証明であり(1938年)，ZF 自身の無矛盾性の問題は解決されていない．またそれより以前に，ゲンツェンが自然数の体系の無矛盾性を証明したが(1936年)，この場合も，自然数の範囲を越えて，超限順序数 ε を認める立場に立ってはじめて可能となっているのである．

完 全 性

まず論理の公理系 L に沿ったかたちで，完全性という条件を定義する．

定義 論理の公理系 L は，次の 1)，2) が成立するとき，「完全」(complete) である，と呼ばれる．

1) L の論理式 A が L の定理であるなら，A は妥当式である (i.e. $\vdash A \Rightarrow \models A$)．

2) L の論理式 A が妥当式であるなら，A は L の定理である (i.e. $\models A \Rightarrow \vdash A$)．

注意 1)は，それだけで「健全性」(soundness)の条件と呼ばれることがある．

1)，2) は，定理となる式の集合と妥当式となる式の集合とが一致することを表わしている．したがって論理の公理系が，公理とされる若干の式によって無限個の妥当式をすべて把握しようという目的をもつ以上，完全性も当然要求される条件であることは明らかであろう．実際下手に公理を選べば，妥当式の一部しか引き出せず，全体をカバーできないことも起り得るのである．また完全性は，意味論的な把握と構文論的な把握との一致を表わしていることも明らかであろう．

次に，同様の考え方から一般の公理系における完全性ということも，仮に定義しておこう．

定義 ある公理系 K は，次の 1)，2) が成立するとき，完全である，と呼ばれる．

1) K の式 A が K の定理であるなら，A は K に対するある解釈のもとで真である．

2) K の式 A が K に対するある解釈のもとで真であるなら，A は K の定理である．

ただし，K に対する解釈とは，K の公理をすべて同時に真とするような K の式への意味づけである (後述 §4.2)．

注意 i) 上の 1)，2) の条件は，いかなる体系を考え，しかもそれに対するいかなる解釈をとるかを限定して，はじめて内容をもつといえる．仮に定義しておく，と述べたのも，その意味である． ii) なお上述した完全性の定義には，妥当式とか，解釈のもとで真とか，意味論的概念が登場した．そこでそれは，とくに「意味論的完全性」(semantical

completeness)と呼ばれることがある．実際これに対して構文論的な完全性という概念もある(後出，p.121参照)．

ところでこの完全性の条件についても，前章に例示した体系Lをはじめ，論理の公理系については，それが満たされることが証明されている．そしてその証明は，単にこの条件が満たされることの証明というだけでなく，論理の構造的な特徴をも明らかにする．それゆえ本書でも，とくに§4.3,§4.4でこの証明については詳しく言及していくことする．しかし一方でまた，論理を除いたほとんどの公理系については，もはや完全性という条件は原理的に満たされないことが明らかにされている．

参考　実際，論理に次ぐ簡単な公理系ともいえる自然数の公理系がすでに不完全であること，したがって自然数をその一部に含むような公理系はすべて不完全になることが証明されている．すなわちゲーデルによって，自然数の公理系については，内容的に真と解釈できる式でありながら，決して定理とはならない式の存在が証明されているのである(これはいわゆる「ゲーデルの第1不完全性定理」(1931年)と呼ばれるものから得られる，付録参照)．なお論理の公理系が完全であることを示したのもゲーデルが最初である(1930年)．

独　立　性

定義　公理系Kの公理AがKの他の公理から「独立」(independent)であるとは，AがKの他の公理の定理とは決してならないことである．

これは公理が他のいっさいを引き出す原点となることから，公理の各々に対して当然要求される条件である．しかし現実には，はじめのうちは公理と思われていたものが，後に証明される場合もある．したがって公理が文字通り公理であるためには，やはり予めそれが他の公理から証明されないことが証明されること(i.e. 独立性の証明)が，問題になるのである．

なおこの独立性についても，前章で例示した論理の体系Lの公理に関しては，それらが相互に独立であることは証明される(p.132参照)．

参考　独立性について，数学基礎論での有名な成果がある．それはAC, CHのZFからの独立性である．先に触れたように，AC, CHがZFに対して相対的に無矛盾であることは示されたが，AC, CHが集合論の公理として認定されるためには，さらにその独立性が証明される必要がある．そしてこの点は，1963年にコーヘンP. Cohenによってようやく示されたのである．

§4.2 解釈再説

論理式の解釈についてはすでに§2.2で一通り触れておいた．しかしそこでの解釈は，個体常項と個体変項への意味づけの違いがはっきりしていないことをはじめ，とくに個体変項の意味づけに関して，必ずしも整備されたものとはいえない．そこでこの節では，この点の改善を含めより整備された解釈の仕方を，後の議論のためにも，見ておくことにしよう．しかしその前に，ごく簡単に新しい解釈の仕方の特徴を2つほど指摘しておく．1) まず解釈の領域Dを決める点は以前と変らないが，以前の解釈では諸記号への意味づけが単にVとされていたのに対し，新しい解釈では，そのVを，個体変項への意味づけの部分sとそれ以外の記号への意味づけの部分Rとにはっきり分けていく．この点が第1の特徴である．つまり$I=\langle D, V\rangle$を$I=\langle D, R, s\rangle$とする．実際このことによって，D, Rの部分の方を一時固定した上で，sの部分のみを変化させることができるようになり，常項とは異なった変項のもつ性格を捉えることが可能となるのである．2) さらにまた新しい解釈の第2の特徴は，このsとして，Dの要素からなる可算列が採用されるところにある．このことによって，複数個の異なった種類の変項が現われている場合なども，それらへの意味づけが，以下に見るようにきわめて統一的組織的に実行されるのである．

注意 なおこの解釈の仕方は，もともとはタルスキーTarskiによって与えられたものである．

枠組Mと意味づけs

まず述語記号P_i^n，関数記号f_i^n，個体常項a_iに対する意味づけである解釈の「枠組」(frame)ということを定義する．

定義 解釈の枠組とは，次のようなDとRとの組のことである．すなわちDは任意に選んだ空でない集合であり，RはP_i^n, f_i^n, a_iの各記号に，D上の述語，D上の関数，Dの要素を各々対応させる対応づけである．

なおDのことは，以前の解釈の場合と同様，解釈の領域という．また解釈の枠組は以下Mで表わすことにする(i.e. $M=\langle D, R\rangle$)．さらにまた，Rによる

各記号の対応物は，次のようにも表わす．$\mathrm{R}[P_i{}^n]=\bar{P}_i{}^n$（ただし $\bar{P}_i{}^n\subseteq \mathrm{D}^n$），$\mathrm{R}[f_i{}^n]=\bar{f}_i{}^n$（ただし $\bar{f}_i{}^n:\mathrm{D}^n\to\mathrm{D}$），$\mathrm{R}[a_i]=\bar{a}_i$（ただし $\bar{a}_i\in\mathrm{D}$）．

次に変項 x_i の意味づけを可能にするために，Dの要素 d_i からなる可算列 s を考える．

定義　$\mathrm{s}\underset{\mathrm{df}}{=}\langle \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \mathrm{d}_3, \cdots\rangle$　（ただし $\mathrm{d}_i\in\mathrm{D}$）．

実際，このような列 s は，i を指定すると，その i に対して s の i 番目の要素 d_i を対応させてくる関数とみなせる（i.e. ω を添字の集合とすると，$\mathrm{s}:\omega\to\mathrm{D}$ であり，$\mathrm{s}(i)=\mathrm{d}_i$ である）．したがって列 s は，変項 x_i に対しても，その添字である i に注目することによって，s の i 番目のものを対応させてくるような対応づけと考えられる．たとえば D: 自然数とし，$\mathrm{s}=\langle 5, 3, 6, \cdots\rangle$ とすると，列 s は，式 $P_1{}^2x_1x_2$ の x_1, x_2 に対して各々 $5(=\mathrm{s}(1)), 3(=\mathrm{s}(2))$ をその意味として対応づけるのである．

ところで上の M, s の定義により，いまや明らかに要素式の解釈が可能となり，したがってその真理値を問題にすることも可能となってくる．しかしそうした問題に入る前にもう1つ，R の一部と s を合せた，項に対する意味づけといえる関数 s★ を定義しておくと，以下での表記に都合がよい．

定義　s★ は，次の 1), 2), 3) によって，項に対して D の要素を対応させる対応づけである（i.e. s★: 項の集合→D）．

1)　$\mathrm{s}^\star[a_i]\underset{\mathrm{df}}{=}\mathrm{R}[a_i]=\bar{a}_i$

2)　$\mathrm{s}^\star[x_i]\underset{\mathrm{df}}{=}\mathrm{s}(i)=\mathrm{d}_i$

3)　$\mathrm{s}^\star[f_i{}^n(t_1, \cdots, t_n)]\underset{\mathrm{df}}{=}\mathrm{R}[f_i{}^n](\mathrm{s}^\star[t_1], \cdots, \mathrm{s}^\star[t_n])$
$=\bar{f}_i{}^n(\mathrm{s}^\star[t_1], \cdots, \mathrm{s}^\star[t_n])$

ただし上の $t_i\,(1\leq i\leq n)$ は項を表わしている．

充足関係（i.e. $\mathrm{M}, \mathrm{s}\models A$）

さて以上の準備のもとに，§2.2での，解釈 I のもとで A は真である（i.e. $\mathrm{I}\models A$），に相当する，M のもとで列 s は A を「充足する」(satisfy)，ということを定義しよう．すなわちそれを $\mathrm{M}, \mathrm{s}\models A$ で表わし，次のように帰納的に定義する．すなわちまず A が要素式 $P_i{}^nt_1\cdots t_n$ の場合を定義し，続いて一般の A の場合を定義する．

定義 A: 要素式$P_i^n t_1 \cdots t_n$の場合. $\mathrm{M,s} \models P_i^n t_1 \cdots t_n \underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} \mathrm{R}[P_i^n]\mathrm{s}^\star[t_1] \cdots \mathrm{s}^\star[t_n]$ がDで成立する(i.e. $\langle \mathrm{s}^\star[t_1], \cdots, \mathrm{s}^\star[t_n] \rangle \in \overline{P}_i^n$).

定義 A: 一般の場合. 1) A:$\neg B$のとき. $\mathrm{M,s} \models \neg B \underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} \mathrm{M,s} \not\models B$. (ただし$\not\models$は$\models$の成立しないことを表わす)

2) A:$B \wedge C$のとき. $\mathrm{M,s} \models B \wedge C \underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} \mathrm{M,s} \models B$かつ$\mathrm{M,s} \models C$.

3) A:$B \vee C$のとき. $\mathrm{M,s} \models B \vee C \underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} \mathrm{M,s} \models B$または$\mathrm{M,s} \models C$.

4) A:$B \supset C$のとき. $\mathrm{M,s} \models B \supset C \underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} \mathrm{M,s} \models B$ならば$\mathrm{M,s} \models C$(i.e. $\mathrm{M,s} \not\models B$または$\mathrm{M,s} \models C$).

5) A:$\forall x_i B$のとき. $\mathrm{M,s} \models \forall x_i B \underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}$ sと高々i番目を異にするs′のすべてについて, $\mathrm{M,s'} \models B$.

6) A:$\exists x_i B$のとき. $\mathrm{M,s} \models \exists x_i B \underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}$ sと高々i番目を異にするs′が少なくとも1つ存在して, $\mathrm{M,s'} \models B$.

注意 $\mathrm{s}(i/\mathrm{d})$で, 列sのi番目のところをdに変えた列を表わすことにすると, 5), 6)は各々次のようにも表わせる.

5′) $\mathrm{M,s} \models \forall x_i B \underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}$ すべてのd ($\in$D)について, $\mathrm{M,s}(i/\mathrm{d}) \models B$.

6′) $\mathrm{M,s} \models \exists x_i B \underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}$ 少なくとも1つのd ($\in$D)が存在して, $\mathrm{M,s}(i/\mathrm{d}) \models B$.

注意 充足関係は, 無限次元の空間D^ωの点sが, その空間での各述語に対応する部分集合の要素であるか否かを, 問題にしているともいえる. なおこの点については, 補遺「論理式の図形化」参照.

以上のように$\mathrm{M,s} \models A$が定義できると, §2.2と同様, それをもとに「妥当式」「充足可能式」「矛盾式」を定義することができる. また, 「同時に充足可能である」(simultaneously satisfiable), 「意味論的推論」なども定義できる. さらに新しい解釈ではIをMとsに分けたことから, 「Mのもとで真である」, 「モデル」(model)Mということも, 新たに定義することが可能になる. 次にこれらの諸概念の定義を記しておこう.

定義 1) Aは(解釈の枠組)Mのもとで真である, を$\mathrm{M} \models A$と表わし, 次のように定義する.

$\mathrm{M} \models A \underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}$ すべての列s($\in \mathrm{D}^\omega$)について, $\mathrm{M,s} \models A$.

2) AはMのもとで偽である, を$\mathrm{M} \not\models A$で表わし, 次のように定義する,

$\mathrm{M} \not\models A \underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}$ すべての列s($\in \mathrm{D}^\omega$)について, $\mathrm{M,s} \not\models A$.

(ただしDはMに伴う解釈の領域を表わしている.)

定義　Mは論理式の集合Γのモデルである，を$M \vDash \Gamma$と表わし，次のように定義する．

$M \vDash \Gamma \underset{df}{\Leftrightarrow} \Gamma$に属するすべての論理式がMのもとで真である．
（なお論理式の集合Γは無限集合であってもよい．）

定義　1）Aは妥当式である，を$\vDash A$で表わし，次のように定義する，

$\vDash A \underset{df}{\Leftrightarrow}$ すべてのMについて，$M \vDash A$.

2）Aは充足可能式である$\underset{df}{\Leftrightarrow}$少なくとも1つのMが存在し，しかも少なくとも1つの列s(ϵ D^{ω})が存在して，$M, s \vDash A$.

（ただしDはMに伴う解釈の領域を表わしている．）

3）Aは矛盾式である$\underset{df}{\Leftrightarrow}$すべてのMについて，$M \nvDash A$.

注意　上の1），2），3）の定義は，$M \vDash A$や$M, s \vDash A$を使った定義であっても，本質的には§2.2での定義(p.51)と全く同じものである．

定義　論理式の集合Γは同時に充足可能である$\underset{df}{\Leftrightarrow}$少なくとも1つのMが存在し，しかも少なくとも1つの列s(ϵ D^{ω})が存在して，そのM, sはΓに属するすべての論理式を充足する．

（なおΓは無限集合であってもよい．またDはMに伴う解釈の領域である．）

定義　論理式の集合ΓからCが意味論的に推論される，ということを$\Gamma \vDash C$と表わし，次のように定義する，

$\Gamma \vDash C \underset{df}{\Leftrightarrow}$ すべてのM，すべてのsについて，もしそのM, sがΓに属する論理式のすべてを同時に充足するなら，そのM, sはCも充足する．
（なおΓは無限集合であってもよい．）

注意　i）この定義も本質的には§2.2の定義(p.55)と同じである．ただし§2.3の定義では，$A_1, \cdots, A_n \vDash C$として$\Gamma$が有限の場合でのみ定義されていた点が異なる．実際，新しい解釈では，列sが可算列にしてあることによって，無限個の変項が現われる可能性がある無限個の論理式の集合に対しても，統一的に意味づけをすることが可能になっているのである．ii）意味論的推論に対しては，次のような上の定義と本質的に異なった定義が与えられることがある．

$\Gamma \vDash C \Leftrightarrow$ すべてのMについて，もしそのMのもとでΓに属する論理式のすべてが同時に真であるなら，そのMのもとでCも真である．

そしてこの定義が採用されると，§2.4の定理4.1やそれに相当するこの節の定理2.6は成立しなくなる．この点，注意が必要である．

さらに上の定義をふまえて$\models_K C$, $\Gamma \models_K C$ということを次のように定義しておく.

定義 1) $\models_K C \underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} \{\mathrm{K}\} \models C$.

2) $\Gamma \models_K C \underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} \Gamma, \{\mathrm{K}\} \models C$.

ただし{K}で, Kの固有公理の集合を表わすことにする.

諸 定 理

まず上の諸定義から直ちに得られる事柄として, 次のようなことが指摘できる.

定理 2.1 1) $\mathrm{M} \models \neg A \Leftrightarrow \mathrm{M} \not\models A$.

2) $\mathrm{M} \models A$かつ$\mathrm{M} \models \neg A$ということはない.

3) $\mathrm{M, s} \models A$, $\mathrm{M, s} \models A \supset B \Rightarrow \mathrm{M, s} \models B$.

4) $\mathrm{M} \models A$, $\mathrm{M} \models A \supset B \Rightarrow \mathrm{M} \models B$.

5) $\models A, \models A \supset B \Rightarrow \models B$.

6) $\mathrm{M} \models A \Leftrightarrow \mathrm{M} \models \forall x_i A$.

7) $\models A \Leftrightarrow \models \forall x_i A$.

8) $\mathrm{M} \models A \Leftrightarrow \mathrm{M} \models A$の閉包. ただし$A$の「閉包」(closure)とは, Aの自由変項のすべてに, 各々に対応する限量記号$\forall$を式Aの先頭に付けた式のことである.

9) $\models A \Leftrightarrow \models A$の閉包.

10) 公理体系Lの公理1, 公理2, 公理3は, 各々妥当式である.

証明 1) $\mathrm{M} \models \neg A \Leftrightarrow$すべてのsについて, $\mathrm{M, s} \models \neg A \Leftrightarrow$すべてのsについて, $\mathrm{M, s} \not\models A \Leftrightarrow \mathrm{M} \not\models A$.

2) $\mathrm{M} \models A$かつ$\mathrm{M} \models \neg A$と仮定する. すると1)により$\mathrm{M} \models A$かつ$\mathrm{M} \not\models A$となり, 矛盾が生ずる.

3) $\mathrm{M, s} \models A \supset B$から定義によって, $\mathrm{M, s} \models A$なら$\mathrm{M, s} \models B$. 一方$\mathrm{M, s} \models A$ゆえ, $\mathrm{M, s} \models B$を得る.

4) $\Rightarrow$の左辺の各々より, すべてのsについて, $\mathrm{M, s} \models A$およびすべてのsについて, $\mathrm{M, s} \models A \supset B$である. そこで3)を使って, すべてのsについて, $\mathrm{M, s} \models B$を得る.

5) 4)がいえることから明らか.

6) M$\models A\Leftrightarrow$ すべての s について，M, s$\models A\Leftrightarrow$ すべての s と s′ とについて，M, s′$\models A\Leftrightarrow$ すべての s について，M, s$\models\forall x_i A$.

7) 6)がいえることから明らか.

8) 6)をくり返すことによって得られる.

9) 8) がいえることから明らか.

10) i) 公理 A 1 について．$\models A\supset(B\supset A)$ でないと仮定する．するとある M とある s が存在して，M, s$\not\models A\supset(B\supset A)$．よってその M と s について，M, s $\models A$…(1) かつ M, s$\not\models B\supset A$…(2)．よってさらに(2)より，その M と s について，M, s$\models B$ かつ M, s$\not\models A$…(3)を得る．しかし(3)は(1)と矛盾する．ii) 公理 A2, iii) 公理 A 3 の場合は略.　□

またさらに次の 3 つの補題を使うと，公理体系 L の公理 A 4, 公理 A 5 も各各妥当式であることを厳密に示すことができる.

補題 2.2　A を任意の論理式とし，A に自由変項 x_{i_j} が含まれているときには，その x_{i_j} は $x_{i_1},\cdots,x_{i_k}$ のうちにあるとする．また s$=\langle \mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2,\cdots\rangle$ かつ s′$=\langle \mathrm{d}_1',\mathrm{d}_2',\cdots\rangle$ とし，しかも $\mathrm{d}_{i_j}=\mathrm{d}_{i_j}'(1\leq j\leq k)$ とする．以上のとき，

$$\mathrm{M,s}\models A\ \Leftrightarrow\ \mathrm{M,s'}\models A.$$

注意　i) 要するに列 s が A の充足に関係するのは，A の自由変項(x_{i_j})に対応する番号(i_j)のところの要素(d_{i_j})のみで，そこの部分さえ同じなら他の列 s′ でも A の充足に関しては s と同じである，ということ．ii) A が自由変項を含んでいないときは，全く s と s′ とが異なっていても，M, s$\models A\Leftrightarrow$M, s′$\models A$ ということになる.

証明　補遺「3 つの補題の証明」を参照.　□

補題 2.3　t, u を項とする．また t に現われているすべての x_k を u で置きかえた項を t' とする．さらに s$=\langle \mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2,\cdots\rangle$ とし，s′$=$s$(k/\mathrm{s}\star[u])$ とする．以上のとき，

$$\mathrm{s}\star[t']=\mathrm{s}'\star[t].$$

注意　要するに，代入によって変化した項(t')への意味づけは，それと相対的に列 s の方も s′ へと変化させた上で，もとの項(t)を意味づけたのと同じである，ということ.

証明　「3 つの補題の証明」参照.　□

補題 2.4　項 t は Ax_k の x_k に対して自由であるとする．また s$=\langle \mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2,\cdots\rangle$ とし，s′$=$s$(k/\mathrm{s}\star[t])$ とする．さらにまた，A' は A の x_k のところに t を代入

した式とする．以上のとき，

$$\mathrm{M,s}\vDash A' \Leftrightarrow \mathrm{M,s'}\vDash A.$$

注意 要するに，代入によって変化した式の s との充足関係は，それと相対的に s を変化させた s′ ともとの式の充足関係と同じである，ということ．

証明 「3 つの補題の証明」参照. □

定理 2.5 1) $\vDash\forall x_i Ax_i \supset At$ ただし t は項であり，また t は Ax_i の x_i に対して自由であるとする．

2) $\vDash\forall x_i(A\supset Bx_i)\supset(A\supset\forall x_i Bx_i)$ ただし A には x_i は自由変項として現われていないとする．

証明 1) $\mathrm{M,s}\vDash\forall x_i Ax_i$ と仮定する．すなわち定義により，すべての $\mathrm{d}(\epsilon\,\mathrm{D})$ について，$\mathrm{M,s}(i/\mathrm{d})\vDash Ax_i$. するとここから，一方で $\mathrm{s}^\star[t]\,\epsilon\,\mathrm{D}$ であることに注意して，$\mathrm{M,s}(i/\mathrm{s}^\star[t])\vDash Ax_i$ を得る．するとさらに，この式に上の補題 2.4 を適用して，$\mathrm{M,s}\vDash At$ を得る．よって以上により，$\mathrm{M,s}\vDash\forall x_i Ax_i$ なら $\mathrm{M,s}\vDash At$ であることが示された．ところでこれは，⊃の定義により，$\mathrm{M,s}\vDash\forall x_i Ax_i\supset At$ でもある．しかも M, s は任意なものといえるゆえ，結局 $\vDash\forall x_i Ax_i\supset At$ が示された．

2) 略．(ほとんど§2.2 p.53 に同じ，ただ正確にするためにあとは補題 2.2 に注意すればよい.) □

意味論的推論 $\Gamma\vDash C$ の定義も与えたので，それに関する定理を 1 つ添えておこう．

定理 2.6 $\Gamma, A\vDash C \Leftrightarrow \Gamma\vDash A\supset C.$

注意 Γ が有限な場合は，§2.4 の定理 4.1 に相当する．

証明 1) ⇒について．$\mathrm{M,s}\vDash\Gamma$…(1) と仮定する．その上でさらに $\mathrm{M,s}\nvDash A\supset C$ と仮定する．すなわち $\mathrm{M,s}\vDash A$…(2) かつ $\mathrm{M,s}\nvDash C$…(3) とする．一方前提 (⇔ の左辺) より，すべての M，すべての s について，$\mathrm{M,s}\vDash\Gamma$ かつ $\mathrm{M,s}\vDash A$ なら $\mathrm{M,s}\vDash C$. よって，$\mathrm{M,s}\vDash\Gamma$ かつ $\mathrm{M,s}\vDash A$ なら $\mathrm{M,s}\vDash C$, がいえる．すると，これと(1)，(2)より，$\mathrm{M,s}\vDash C$…(4) を得る．しかしこれは(3)と矛盾する．よって(1)が成立するときは，$\mathrm{M,s}\vDash A\supset C$ でなければならない．また以上のことは任意の M, s についていえるゆえ，結局 $\Gamma\vDash A\supset C$ が成立する．

2) ⇐について．$\mathrm{M,s}\vDash\Gamma$…(1) かつ $\mathrm{M,s}\vDash A$…(2) と仮定する．一方前提 (⇔

の右辺)より，M, s$\models\Gamma$ なら M, s$\models A\supset C$ を得る．すると，これと(1)とから M, s$\models A\supset C$…(3) を得る．するとさらに，(2)と(3)と定理 2.1 の 3) とから，M, s$\models C$ を得る．よって M, s$\models\Gamma$ かつ M, s$\models A$ なら M, s$\models C$，であり，このことは任意の M, s についていえるゆえ，結局 $\Gamma, A\models C$ が成立する． □

注意 $\Gamma\models C$ の定義の注意 ii)で触れたように，$\Gamma\models C$ に対する別の定義のもとでは上の定理は成立しない．

◇ 3つの補題の証明

§4.2 に現われた3つの補題(補題 2.2～2.4)の証明を，以下に記しておく．これらの補題は，充足が関係してくる議論を厳密に展開する場合に，ときどき必要となる．

準備 次のような記号法を導入しておく．

1) s(*i*/d)：列 s の i 番目を d に置きかえた列(この記号法はすでに本文でも触れた)．

2) s(*i*/d)(*k*/d′)：列 s(*i*/d) の k 番目を d′ に置きかえた列．

注意 $i\neq k$ のときは，明らかに s(*i*/d)(*k*/d′)＝s(*k*/d′)(*i*/d) が成立する．

補題 2.2 A を任意の論理式とし，A に自由変項 x_{i_j} が含まれているときには，その x_{i_j} は $x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}$ のうちにあるとする．また s$=\langle d_1, d_2, \cdots\rangle$ かつ s′$=\langle d_1', d_2', \cdots\rangle$ とし，しかも $d_{i_j}=d_{i_j}'(1\leq j\leq k)$ とする．以上のとき，M, s$\models A \Leftrightarrow$ M, s′$\models A$.

証明 ($\wedge, \vee, \supset, \neg, \forall, \exists$ についての帰納法で示す．) 1) A:$P_i t_1\cdots t_n$ のとき．まず s★$[t]$＝s′★$[t]$…(1)を示しておく． i) t が変項のとき．このときこの変項は要素式中の変項ゆえ自由変項であり，$x_{i_j}(1\leq j\leq k)$ である．よって，s★$[t]$＝s★$[x_{i_j}]=d_{i_j}=d_{i_j}'$＝s★$[x_{i_j}]$＝s′★$[t]$. ii) t が個体常項 a_i のとき． s★$[t]$＝s★$[a_i]=\bar{a}_i(\in D)$＝s′★$[a_i]$＝s′★$[t]$. iii) t が $f_i(t_{j_1}, \cdots, t_{j_m})$ のとき．$t_{j_1}, \cdots, t_{j_m}$ については(1)が成立していると仮定する．すると s★$[t]$＝s★$[f_i(t_{j_1}, \cdots, t_{j_m})]=\bar{f}_i$(s★$[t_{j_1}], \cdots,$ s★$[t_{j_m}]$)$=\bar{f}_i$(s′★$[t_{j_1}], \cdots,$ s′★$[t_{j_m}]$)＝s′★$[f_i(t_{j_1}, \cdots, t_{j_m})]$＝s′★$[t]$. 次に以上によって証明された(1)を使うと，

M, s$\models P_i t_1\cdots t_n \Leftrightarrow \langle$s★$[t_1], \cdots,$ s★$[t_n]\rangle\in\bar{P}_i$ (充足の定義)

$\Leftrightarrow \langle$s′★$[t_1], \cdots,$ s′★$[t_n]\rangle\in\bar{P}_i$ ((1)による)

$\Leftrightarrow$ M, s′$\models P_i t_1\cdots t_n$ (充足の定義)

となる．

2) A:$\neg B$ のとき．次の通りである．

M, s$\models\neg B \Leftrightarrow$ M, s$\not\models B$ (充足の定義)

$\Leftrightarrow$ M, s′$\not\models B$ (帰納法の仮定より)

$\Leftrightarrow$ M, s′$\models\neg B$ (充足の定義)．

3) A:$B\supset C$ のとき．略．2)と同様に．

4) A:$B\wedge C$ のとき．略．2)と同様に．

5) A:$B\vee C$のとき．略．2)と同様に．

6) A:$\forall x_i B$のとき． i) ⇒について．まず$\mathrm{M, s}\models\forall x_i B$とする．すなわち，すべての$\mathrm{d}(\in\mathrm{D})$について，$\mathrm{M, s}(i/\mathrm{d})\models B$…(1)とする．ところで補題の前提により，$\mathrm{s}(i/\mathrm{d})$も$\mathrm{s}'(i/\mathrm{d})$も$i_j$番目のところはDの同じ要素をもつゆえ，帰納法の仮定から，$\mathrm{M, s}(i/\mathrm{d})\models B\Leftrightarrow\mathrm{M, s}'(i/\mathrm{d})\models B$…(2)である．よって(1)，(2)より，すべての$\mathrm{d}(\in\mathrm{D})$について，$\mathrm{M, s}'(i/\mathrm{d})\models B$を得る．すなわち，$\mathrm{M, s}'\models\forall x_i B$． ii) ⇐について．i)と同様に．

7) A:$\exists x_i B$のとき．略．6)と同様に． □

補題 2.3 t, uは項とする．またtに現われているすべてのx_kをuで置きかえた項をt'とする．さらに$\mathrm{s}=\langle\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \cdots\rangle$とし$\mathrm{s}'=\mathrm{s}(k/\mathrm{s}\bigstar[u])$とする．以上のとき，$\mathrm{s}\bigstar[t']=\mathrm{s}'\bigstar[t]$．

証明 1) t:x_iのとき．ただし$i\neq k$とする．このとき，$t'=t=x_i$ゆえ，$\mathrm{s}\bigstar[t']=\mathrm{s}\bigstar[x_i]=\mathrm{d}_i=\mathrm{s}'\bigstar[x_i]=\mathrm{s}'\bigstar[t]$．

2) t:x_kのとき．このとき$t'=u$となり，$\mathrm{s}\bigstar[t']=\mathrm{s}\bigstar[u]$．一方また$\mathrm{s}'$の$k$番目は$\mathrm{s}\bigstar[u]$ゆえ，$\mathrm{s}'\bigstar[t]=\mathrm{s}'\bigstar[x_k]=\mathrm{s}\bigstar[u]$．よって$\mathrm{s}\bigstar[t']=\mathrm{s}'\bigstar[t]$．

3) t:a_iのとき．このとき$t'=t=a_i$ゆえ，$\mathrm{s}\bigstar[t]=\mathrm{s}\bigstar[a_i]=\bar{a}_i(\in\mathrm{D})=\mathrm{s}'\bigstar[a_i]=\mathrm{s}'\bigstar[t]$．

4) t:$f_i(t_1, \cdots, t_n)$のとき．$t_1, \cdots, t_n$については補題が成立していると仮定する．さてこのとき，$t'=f_i(t_1', \cdots, t_n')$といえるゆえ，$\mathrm{s}\bigstar[t']=\mathrm{s}\bigstar[f_i(t_1', \cdots, t_n')]=\bar{f}_i(\mathrm{s}\bigstar[t_1'], \cdots, \mathrm{s}\bigstar[t_n'])=\bar{f}_i(\mathrm{s}'\bigstar[t_1], \cdots, \mathrm{s}'\bigstar[t_n])=\mathrm{s}'\bigstar[f_i(t_1, \cdots, t_n)]=\mathrm{s}'\bigstar[t]$． □

補題 2.4 項tはAx_kのx_kに対して自由であるとする．$\mathrm{s}=\langle\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \cdots\rangle$で$\mathrm{s}'=\mathrm{s}(k/\mathrm{s}\bigstar[t])$とする．また$A'$は$A$の$x_k$のところに$t$を代入した論理式とする．以上のとき，$\mathrm{M, s}\models A'\Leftrightarrow\mathrm{M, s}'\models A$．

証明 (帰納法を使う.) 1) A:$P_i t_1\cdots t_n$のとき．このときt_i'をt_iに現われるすべてのx_kをtで置きかえた項とすると，A'は$P_i t_1'\cdots t_n'$と書ける．また補題2.3により，$\mathrm{s}\bigstar[t_i']=\mathrm{s}'\bigstar[t_i]$ゆえ，

$$\begin{aligned}\mathrm{M, s}\models P_i t_1'\cdots t'_n &\Leftrightarrow \langle\mathrm{s}\bigstar[t_1'], \cdots, \mathrm{s}\bigstar[t_n']\rangle\in\bar{P}_i\\ &\Leftrightarrow \langle\mathrm{s}'\bigstar[t_1], \cdots, \mathrm{s}'\bigstar[t_n]\rangle\in\bar{P}_i\\ &\Leftrightarrow \mathrm{M, s}'\models P_i t_1\cdots t_n\end{aligned}$$

となる．

2) A:$\neg B$のとき．このときA'は明らかに$\neg B'$．ただしB'はBのx_kのところをtに置きかえた論理式とする．なおtはBのx_kに対して自由である．さてすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{M, s}\models\neg B' &\Leftrightarrow \mathrm{M, s}\not\models B'\\ &\Leftrightarrow \mathrm{M, s}'\not\models B \qquad \text{(帰納法の仮定)}\\ &\Leftrightarrow \mathrm{M, s}'\models\neg B\end{aligned}$$

となる．

3) A:$B\supset C$のとき．略．2)と同様に．

4) A:$B\wedge C$のとき．略．2)と同様に．

5) A:$B \vee C$ のとき．略．2)と同様に．

6) A:$\forall x_i B$ のとき．このとき A' は明らかに $\forall x_i B'$．ただし B' は B の x_k のところを t に置きかえた論理式とする．なお t は B の x_k に対して自由である．

i) x_k $(i \neq k)$ が自由変項として A に現われているとき．このとき，

$$\mathrm{M, s}(i/\mathrm{d}) \vDash B' \Leftrightarrow \mathrm{M, s}(i/\mathrm{d})' \vDash B \qquad \text{(帰納法の仮定)}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{M, s}(i/\mathrm{d})\,(k/\mathrm{s}(i/\mathrm{d})\star[t]) \vDash B \qquad (\mathrm{s}' \text{ の定義}) \qquad (1)$$

を得る．ところで t は Ax_k の x_k に対して自由であるゆえ，t のなかに x_i がでてくることはない．よって $\mathrm{s}(i/\mathrm{d})\star[t] = \mathrm{s}\star[t]$．するとこれと(1)より，

$$\mathrm{M, s}(i/\mathrm{d}) \vDash B' \Leftrightarrow \mathrm{M, s}(i/\mathrm{d})\,(k/\mathrm{s}\star[t]) \vDash B \qquad (2)$$

を得る．するとさらにこの(2)を使って，

$$\mathrm{M, s} \vDash \forall x_i B' \Leftrightarrow \text{すべての d について，} \mathrm{M, s}(i/\mathrm{d}) \vDash B' \qquad \text{(充足の定義)}$$

$$\Leftrightarrow \text{すべての d について，} \mathrm{M, s}(i/\mathrm{d})\,(k/\mathrm{s}\star[t]) \vDash B \qquad \text{((2)による)} \; (3)$$

を得る．さて一方，

$$\mathrm{M, s}' \vDash \forall x_i B \Leftrightarrow \mathrm{M, s}(k/\mathrm{s}\star[t]) \vDash \forall x_i B \qquad (\mathrm{s}' \text{ の定義})$$

$$\Leftrightarrow \text{すべての d について，} \mathrm{M, s}(k/\mathrm{s}\star[t])\,(i/\mathrm{d}) \vDash B \qquad \text{(充足の定義)}$$

$$\Leftrightarrow \text{すべての d について，} \mathrm{M, s}(i/\mathrm{d})\,(k/\mathrm{s}\star[t]) \vDash B$$

(上記した準備の注意)　(4)

という関係も成立する．よって(3)，(4)より $\mathrm{M, s} \vDash \forall x_i B' \Leftrightarrow \mathrm{M, s}' \vDash \forall x_i B$ が示される．

ii) x_k $(i=k)$ のとき．このとき x_k は明らかに A で自由変項ではない．よって次の iii) の場合に相当する．

iii) x_k が自由変項として A に現われていないとき．このとき A' は A である．また一方，s と s′ とは高々 k 番目のところが異なるだけゆえ，補題 2.2 により，$\mathrm{M, s} \vDash A \Leftrightarrow \mathrm{M, s}' \vDash A$．よって，$\mathrm{M\ s} \vDash A' \Leftrightarrow \mathrm{M, s}' \vDash A$ を得る．

7) A:$\exists x_i B$ のとき．略．6)と同様に．　□

◇ 論理式の図形化

充足関係 $\mathrm{M, s} \vDash A$ ということをより身近にするために，論理式の図形化ということを考えてみる．そのためにはまず，D の可算無限個の要素からなる列 $\mathrm{s} = \langle \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \cdots \rangle$ が，$\mathrm{D} \times \mathrm{D} \times \cdots$ (i.e. D^ω) なるいわば可算無限次元の空間の点と考えられること，また論理式 A にはその部分集合となる $\{\mathrm{s} : \mathrm{M, s} \vDash A\}$ が対応してくること，さらに $\mathrm{M, s} \vDash A$ の成立・不成立は，点 s がその部分集合の要素であるか否かとして考えられることなどに，注意すればよい．なぜなら，これと同じ事柄が $\mathrm{D} \times \mathrm{D}$ (i.e. D^2) でも成立し，しかもこの場合は図形化できるからである．すなわち変項が高々 2 種類しか現われない論理式を問題にする場合には，$\mathrm{M, s} \vDash A$ の s は $\mathrm{s} = \langle \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2 \rangle$ で十分であり，A に対応する集合 $\{\mathrm{s} : \mathrm{M, s} \vDash A\}$ は D^2 の部分集合として D^2 上に図示できる．そこで以下この辺のところをもう少し

具体的に見ていこう．

1) まず D×D を用意する．ただし x_1 の変域となる D は D_1 とし，x_2 の変域となる D は D_2 として区別する．つまり $D_1 \times D_2$ を用意する．

2) 次に Px_1 に対応する $\{s:M, s \models Px_1\}$ の $D_1 \times D_2$ 上の図を考えよう．Px_1 には x_2 は現われていず，$s = \langle d_1, d_2 \rangle$ の d_2 は任意のものでよい．そこで P の意味(i.e. R[P])によって制限される d_1 の範囲である D_1 の部分を，いわば D_2 の方向へ延ばしていった部分が，$\{s:M, s \models Px_1\}$ の図，すなわち Px_1 の図である(図 4.1 の(1)参照)．

3) $Px_1 \wedge Qx_2$ の図を考えよう．まず Px_1, Qx_2 に対応する部分集合を 2)の要領で図示する．一方，$\{s:M, s \models Px_1 \wedge Qx_2\} = \{s:M, s \models Px_1$ かつ $M, s \models Qx_2\} = \{s:M, s \models Px_1\} \cap \{s:M, s \models Qx_2\}$ ゆえ，Px_1, Qx_2 各々の図の共通部分が $Px_1 \wedge Qx_2$ の図となる(図 4.1 の(2)参照)．

4) Rx_1x_2 の図を考えよう．これは R の意味(i.e. R[R])を満足する d_1 と d_2 の対 $\langle d_1, d_2 \rangle$ を要素とする集合である(図 4.1 の(3)参照)．

5) $\exists x_1 Rx_1x_2$ の図を考えよう．定義により，$\{s:M, s \models \exists x_1 Rx_1x_2\}$ は $\{s:s$ と高々 1 番目のところを異にする s' が少なくとも 1 つ存在して，$M, s' \models Rx_1x_2\}$ である．よって R の意味を満足する d_1 と d_2 の対 $\langle d_1, d_2 \rangle$ の d_1 を任意のものと考えた部分が，$\exists x_1 Rx_1x_2$ の図である(図 4.1 の(4)参照)．

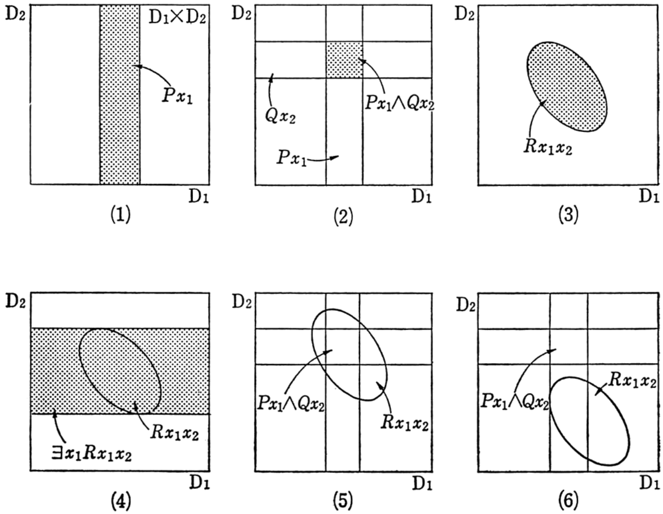


図 4.1

さて1)～5)を参考にすれば，いまや高々2種類の変項しか現われない任意の論理式について，その図形化は明らかであろう．$\vee$, $\neg$ は各々合併集合，補集合により，$\supset$ は $\neg$ と $\vee$ で表わすことにより，$\forall$ は $\neg$ と $\exists$ で表わすことにより，結局，論理式を構成する諸記号がすべて $D_1 \times D_2$ 上に図示できるからである．ただ最後にひとこと，閉じた式の場合は，$D_1 \times D_2$ (i.e. 全空間) か ϕ となることを注意しておく．どちらになるかは，もとより述語記号への意味の与え方によって決まる．この点は，たとえば $\forall x(Px \supset \forall y(Qy \supset Rxy))$，i.e. $\neg\exists x_1 \exists x_2 (Px_1 \wedge Qx_2 \wedge \neg Rx_1x_2)$ を例とし，さらにその P, Q, R を図(5)あるいは(6)のように仮に与えたとき，各々どうなるかを調べてみるとよいであろう．

注意　3次元の場合(i.e. D^3)も図示は可能である．すなわち高々3種類の変項しか現われない論理式についても，その図形化は可能である．しかし2次元の場合にせよ，3次元の場合にせよ，Dを具体的に決め正確に図形化することは，多くの場合，実際には難しい．ここでは充足関係や論理式の性格を理解する助として，それらをイメージ化してみたのである．

§4.3　完全性定理

第1完全性定理

さて妥当式の集合は，論理の公理体系Lの定理の集合と一致するであろうか．あるいは結局同じことになるが，意味論的な立場から捉えられた正しい推論 $(A_1, \cdots, A_n \models C)$ は，構文論的な立場から捉えられた正しい推論 $(A_1, \cdots, A_n \vdash C)$ と一致するであろうか．しかしこの章のはじめにもすでに予告したように，これらの問に対しては，「完全性定理」(Completeness Theorem)として下記の定理3.4と定理3.9で肯定的に答えられる．

定理3.4 (第1完全性定理)　1)　$\models C \Leftrightarrow \vdash C.$

2)　$A_1, \cdots, A_n \models C \Leftrightarrow A_1, \cdots, A_n \vdash C.$

定理3.9 (第2完全性定理)　$\Gamma \models C \Leftrightarrow \Gamma \vdash C.$　　ただし Γ は任意個(i.e. 無限個でもよい)の論理式からなる列とする．

注意　i) 定理3.9は定理3.4の2)の一般化した形になっている．ii) 定理3.4を第一完全性定理，定理3.9を第二完全性定理と本書では名づけたが，他では，前者に相当する定理を単に「完全性定理」あるいは「ゲーデルの完全性定理」と呼び，後者に相当する定理を「強い完全性定理」と呼ぶこともある．

さてこれらの定理の証明であるが，まず定理3.4から証明しよう．しかし直ちにその証明を与えるのではなく，次のような手順で進めていく．すなわちは

じめに1)の右辺から左辺を引き出す過程を改めて定理3.1とし，その証明を与える．これは前節の結果を使うことにより簡単である．次に1)の左辺から右辺を引き出す過程を，これまた改めて定理3.3とした上で，その証明を与える．しかしこちらの方の証明は簡単ではない．そこでこの節では差し当り，完全性の問題にとってその核心となる「ヘンキンの定理」(Henkin's theorem)を証明なしで(次節で与える)提示し，それを前提した上で証明しておく．ただその際，補題3.2も必要となるので，まずそれに触れ，その後で定理3.3を証明する．また定理3.4の2)は，1)の結果から容易に得られるので，1)の証明の後，それを取り上げることにする．

定理 3.1 $\vdash C \Rightarrow \models C$.

証明 $\vdash C$と仮定する．すると定義により，次のような式の列$B_1, \cdots, B_m$ $(=C)$が存在する．すなわちB_iはLの公理であるか，先行する式から推論規則MPやGenによって得られた式である．ところで前節の定理2.1の10)と定理2.5により，Lの公理はすべて妥当式である．また規則MP, Genは，各各前節の定理2.1の5)と7)により，妥当式から妥当式を引き出していくものである．よって明らかに$B_m(=C)$は妥当式である． □

注意 この定理によって，論理の公理体系Lが無矛盾であることも明らかになる．すなわちLの定理がすべて妥当式である以上，ある式の肯定形と否定形とがともにLの定理となることは不可能であるからである．

定理 4.3 (第1ヘンキンの定理) 無矛盾な理論はすべて可算モデルをもつ．

注意 i) ここで理論とは，§3.3で定義した第1階の理論のことである． ii) 可算モデルとは，それに伴う解釈の領域が可算無限個の要素からなる集合であるモデルのこと．iii) 証明はここでは省略．次節で示す．

補題 3.2 理論Kのある閉じた式$\neg A$がKの定理でない(i.e. $\vdash_K \neg A$でない)なら，Kに新たに公理としてAを加えた理論K'(i.e. $K'=K\cup\{A\}$)は無矛盾である．

証明 K'が矛盾していると仮定する．するとある式Bが存在して，$\vdash_{K'} B$かつ$\vdash_{K'} \neg B$…(1)．ところで一方，$\vdash \neg B \supset (B \supset \neg A)$ゆえ，$\vdash_{K'} \neg B \supset (B \supset \neg A)$…(2)である．よって(1), (2)より$\vdash_{K'} \neg A$，すなわち$A \vdash_K \neg A$である．そこでさらに演繹定理を使うと$\vdash_K A \supset \neg A$…(3)を得る．ところでまた，$\vdash (A \supset \neg A) \supset \neg A$ゆえ，$\vdash_K (A \supset \neg A) \supset \neg A$…(4)でもあり，(3), (4)より$\vdash_K \neg A$を得る．

しかしこれは$\vdash_K \neg A$でないという補題の前提と矛盾する．　□

定理 3.3　$\models C \Rightarrow \vdash C$.

証明　($\models A \Leftrightarrow \models A$の閉包，$\vdash A \Leftrightarrow \vdash A$の閉包の各々が，すでに見たように一般に成立することから，以下の証明ではCが閉じた式の場合を考えれば十分である．）まず$\vdash C$でないと仮定する(背理法)．すると論理の体系Lに$\neg C$を新たに公理として加えた理論K(i.e. $K=L\cup\{\neg C\}$)は，上の補題3.2により無矛盾である．するとさらにヘンキンの定理により，このKはモデルMをもつ．ところで$\neg C$はKの公理ゆえ，当然$\neg C$はこのMのもとで真である(i.e. $\mathrm{M}\models\neg C$)．よってCはMのもとで偽である(i.e. $\mathrm{M}\not\models C$)．しかし一方，定理の前提$\models C$より，Cはすべてのモデルのもとで真である．よってMのもとでも真である(i.e. $\mathrm{M}\models C$)．するとこれは$\mathrm{M}\not\models C$と矛盾する．　□

定理 3.4 の証明　1)について．上の定理3.1と定理3.3より明らか．

2)について．前節の定理2.6により，$A_1, \cdots, A_n \models C \Leftrightarrow \models A_1 \supset (A_2 \supset \cdots (A_n \supset C) \cdots)$ …(1)．また§3.2のDTにより，$A_1, \cdots, A_n \vdash C \Leftrightarrow \vdash A_1 \supset (A_2 \supset \cdots (A_n \supset C) \cdots)$ …(2)．ところで上の1)により，$\models A_1 \supset (A_2 \supset \cdots (A_n \supset C) \cdots) \Leftrightarrow \vdash A_1 \supset (A_2 \supset \cdots (A_n \supset C) \cdots)$ …(3)が成立．よって(1)，(2)，(3)より2)が成立する．　□

注意　定理3.4の2)は，定理2.6および§3.2のDTに依存しているが，これらの定理はまた各々意味論的推論の定義と公理体系での前提からの演繹についての定義の与え方に大きく依存している．実際，本書での定義では定理2.6，§3.2のDTはともに成立するが，他書ではしばしばそれらが成立しないような定義がなされることもあるから注意を要する．

なお定理3.4の2)が成立すると，次のような系を引き出してみることもできる．

系 3.5　1)　$\models_K C \Leftrightarrow \vdash_K C$.

2)　$A_1, \cdots, A_n \models_K C \Leftrightarrow A_1, \cdots, A_n \vdash_K C$.

ただしKは有限個の固有公理からなる理論とする．

証明　§4.2の定義より$A_1, \cdots, A_n \models_K C \Leftrightarrow A_1, \cdots, A_n, \mathrm{K}1, \cdots, \mathrm{K}m \models C$，また§3.3の定義より$A_1, \cdots, A_n \vdash_K C \Leftrightarrow A_1, \cdots, A_n, \mathrm{K}1, \cdots, \mathrm{K}m \vdash C$である(ただし$\mathrm{K}i\,(1 \leq i \leq m)$は$K$の固有公理とする)．すると2)は定理4.3の2)から明らかである．また1)は2)の特殊な場合といえる．　□

第 2 完全性定理

次に定理 3.9 の証明に移ろう．しかしここでも直ちにその証明を与えるのではなく，定理 3.4 の場合とほぼ同様の手順に従って進めていく．なお Γ が有限個の式からなる場合は，明らかに定理 3.4 の 2)に相当するゆえ，以下ではもっぱら Γ は無限個からなっていると考える．

定理 3.6　$\Gamma \vdash C \Rightarrow \Gamma \vDash C$.

証明　まず $\Gamma \vdash C$ と仮定する．すると定義により次のような有限個の式の列 $B_1, \cdots, B_m (=C)$ が存在する．すなわち $B_i (1 \leq i \leq m)$ は，Γ に現われる式であるか，論理の公理であるか，先行する式から規則 MP, Gen によって得られる式かである．つまり，いまこの B_i として現われる Γ の中の式を $A_1, \cdots, A_l (l \leq m)$ とすると，$A_1, \cdots, A_l \vdash C$ といえる．すると，一方で定理 3.4 により $A_1, \cdots, A_l \vdash C \Rightarrow A_1, \cdots, A_l \vDash C$ ゆえ，$A_1, \cdots, A_l \vDash C \cdots (1)$ を得る．ところでいま $\mathrm{M}, \mathrm{s} \vDash \Gamma \cdots (2)$ と仮定する．すると，$A_1, \cdots, A_l$ は Γ の一部ゆえ，この M, s は $A_1, \cdots, A_l$ を同時に充足する．すると，(1)と組み合せて，この M, s については，$\mathrm{M}, \mathrm{s} \vDash C \cdots (3)$ が成立する．結局(2)ならば(3)であり，よってここから $\Gamma \vDash C$ がいえる．　□

次にこの定理の逆(i.e. 定理 3.8)を示すため，再びヘンキンの定理が必要となる．しかし先の定理 4.3 の形のものでは十分でない．次の定理 4.7 の形のものが必要となる．しかしその前に 1 つ定義が必要となる．それは公理系あるいは理論の無矛盾性ではなく，「論理式の集合の無矛盾性」ということである．

定義　論理式の集合 Γ に属する任意有限個の論理式 $A_1, \cdots, A_n$ に対して，$A_1, \cdots, A_n \vdash B \wedge \neg B$ となるある論理式 B が存在するということはないとき，論理式の集合 Γ は無矛盾である，という．

注意　上の定義の代りに，Γ に属する任意有限個の式 $A_1, \cdots, A_n$ に対して，$\vdash \neg (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ となることはないとき，Γ は無矛盾である，と定義してもよい．同じことになる．

定理 4.7（第 2 ヘンキンの定理）　ある理論の論理式の集合が無矛盾であれば，それは可算領域で同時に充足可能である．

注意　i) ここでの理論はもとより第 1 階の理論である．ii) この場合の論理式は閉じた式でも開いた式でもどちらでもよい．　iii) 証明はここでは省略．次節で述べる．

補題 3.7　論理式の集合 Γ に論理式 $\neg A$ を新たに加えた集合(i.e. $\Gamma \cup \{\neg$

$A\})$ が矛盾しているなら，$\Gamma \vdash A$ である．

証明 論理式の集合 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ が矛盾していることより，ある論理式 B が存在して，$\Gamma, \neg A \vdash B$ かつ $\Gamma, \neg A \vdash \neg B$ がいえる．よって§3.2の DT により，$\Gamma \vdash \neg A \supset B \cdots (1)$ かつ $\Gamma \vdash \neg A \supset \neg B \cdots (2)$ を得る．一方 $\vdash (\neg A \supset \neg B) \supset ((\neg A \supset B) \supset A)$ (公理3) ゆえ，$\Gamma \vdash (\neg A \supset \neg B) \supset ((\neg A \supset B) \supset A) \cdots (3)$．よって(1), (2), (3)より，MP を使って $\Gamma \vdash A$ を得る． ▯

定理 3.8 $\Gamma \vDash C \Rightarrow \Gamma \vdash C.$

証明 $\Gamma \vDash C$ と仮定する．すると定義により，すべての M，すべての s について，$\mathrm{M}, \mathrm{s} \vDash \Gamma$ なら $\mathrm{M}, \mathrm{s} \vDash C$．すなわち $\mathrm{M}, \mathrm{s} \vDash \Gamma$ かつ $\mathrm{M}, \mathrm{s} \vDash \neg C$ であるような s が存在し M が存在するということはない．つまり $\Gamma \cup \{\neg C\}$ は同時に充足可能でない．そこで第2ヘンキンの定理4.7の対偶を使うと，論理式の集合 $\Gamma \cup \{\neg C\}$ はいまや矛盾しているといえる．すると，上の補題3.7によって，$\Gamma \vdash C$ となる． ▯

定理 3.9 の証明 定理3.6と定理3.8から明らかとなる． ▯

なお定理3.9の系として次のようなこともいえる．

系 3.10 1) $\vDash_K C \Leftrightarrow \vdash_K C.$

2) $A_1, \cdots, A_n \vDash_K C \Leftrightarrow A_1, \cdots, A_n \vdash_K C.$

注意 系3.5と異なり，この系の K は無限個の固有公理をもつことも可能である．

証明 2)について．$A_1, \cdots, A_n \vDash_K C$ の定義(p. 107)，$A_1, \cdots, A_n \vdash_K C$ の性質(p. 88)および定理3.9から明らか．

1)について．2)の特殊な場合といえる． ▯

ヘンキンの定理の証明の構想

以上，完全性定理が，ヘンキンの定理を前提にして，そこから導き出される過程をながめた．そこで次に，ヘンキンの定理の証明が，当然課題となってくる．しかしその証明を具体的に示すまえに，証明のアイディアを中心に，そのおおよそのところを予め述べておこう．

まず定理自体の意味であるが，理論 K がモデル M をもつということは，ある解釈の枠組 M が存在し，その M のもとで，K に属する式(i.e. K の定理である式)が，すべて真となることを表わしている．つまり K の論理式の集合の

うち，K の定理となる部分がもつ特徴として，「Mのもとで真である」といえるような解釈の枠組 M の存在の主張である．したがってこの定理の意味からも予想できるように，その証明は，K の定理の部分がもつ何らかの際立った特徴を K の定理の部分に見つけ出すことが，その要点となる．そしてそのために，ヘンキンの定理の証明では，K の定理の部分がもつ無矛盾性という性質に伴う次のような基本的な事柄が注目され，それが最大限利用される．

すなわちその基本的な事柄とは第1に，無矛盾な理論 K には，それを部分として含むより大きく，しかも再び無矛盾であるような理論が考えられる，ということである．また第2には，そうした K を含む無矛盾な理論の中には，それより大きな理論があるとすればその理論自身でしかない，という性質(i.e. 極大性，§5.1 参照)をもつ無矛盾な理論が必ず存在することである．すなわち K を含む極大無矛盾理論 J の存在である．さらに第3には，この極大無矛盾理論 J では，J の任意の閉じた式 A について，それが J に属する式である(i.e. $\vdash_J A$)か，またはその否定形が J に属する式である(i.e. $\vdash_J \neg A$)かのいずれかである，ということが成立することである(なお，以上の基本的な事柄は次節では，「リンデンバウムの補題」(Lindenbaum's lemma) として述べられることになる)．

実際以上の事柄に注目するとき，J に属するか否かによっていまや K の式を区別する手がかりが与えられることになり，この J を使って K のモデル M を考えることが可能となる．すなわち K の式 A について，$\vdash_J A$ をもって $\mathrm{M}\models A$ としよう(i.e. $\mathrm{M}\models A \Leftrightarrow \vdash_J A$ としよう)，という考え方であり，この考え方が正当であることの確認が，ヘンキンの定理の証明の核心となるのである．

ところでヘンキンの定理の証明については，もう1つ予め注意をしておくことがある．それは，意味論的な立場では，K に関して $\mathrm{M}\models \exists x_{i_k} A_k x_{i_k} \supset A_k b_{j_k}$…(1)(ただし b_{j_k} は $\mathrm{R}[A_k]\mathrm{R}[b_{j_k}]$ である限りのもの)が成立するのに対し，J が単に K を含む極大無矛盾理論というだけでは，構文論的な立場での(1)に対応する $\vdash_J \exists x_{i_k} A_k x_{i_k} \supset A_k b_{j_k}$…(2)(ただし b_{j_k} は新しい個体常項)が成立するとはいえないからである．すなわちすでに説明したように(§2.3)，(1)の成立はその後件が真となるような意味づけに依存しているのに対して，そうした内容上の限定とは関係のない構文論的立場では，$\exists x_{i_k} A_k x_{i_k} \supset A_k b_{j_k}$ は決して論理的定理で

はなく，(2)の成立は直ちには認められないのである．しかしそれにもかかわらず，K のモデル M を考えるに当って，上記したように，$M \vDash A \Leftrightarrow \vdash_J A$ とするためには，是非とも(1)に対応する(2)の成立が要求されてくる．そこで実は，極大無矛盾理論 J を考える際に，単に K を含むような極大無矛盾理論として J を考えるのではなく，K に $\exists x_{i_k} A_k x_{i_k} \supset A_k b_{j_k} (k=1, 2, 3, \cdots)$ を公理として加えた理論 K_ω を予め考え，その上でそれを含む極大無矛盾理論 J を考えるのである．というのも，無矛盾な理論 K に $\exists x_{i_k} A_k x_{i_k} \supset A_k b_{j_k} (k=1, 2, 3, \cdots)$ …(3)を公理として加えた理論 K_ω も無矛盾であることを示すことができ，しかも上に記したように無矛盾な理論には必ずそれを含む極大無矛盾理論が存在するといえるからである．$M \vDash A \Leftrightarrow \vdash_J A$ としようとする J は，このように(2)の成立するように工夫された上での J なのである．

注意　次節での実際の証明では，限量記号に関して $\forall$ のみを基本記号としそれに対する論理公理を与えるスタイルの理論を便宜上取り扱っているゆえ，$\exists x_{i_k} A_k x_{i_k} \supset A_k b_{j_k}$ ではなく，$\neg \forall x_{i_k} \neg A_k x_{i_k} \supset A_k b_{j_k}$ のかたちで登場する．

以上ヘンキンの定理の証明の考え方の要点となることを簡単に触れたが，いまやその大よその手順も容易に予想がつくであろう．すなわち，まず無矛盾な理論について基本的な事柄であるリンデンバウムの補題の提示と証明，次に，K を含みしかも(3)が成立する理論 K_n, K_ω などの定義とその無矛盾性の証明，およびそれへのリンデンバウムの補題の適用による J の構成である．さらに手順の最後として，この J を使って K のモデル M を考えるために，一般に $M \vDash A \Leftrightarrow \vdash_J A$ が成立してくることの証明も必要となる．

§4.4　ヘンキンの定理

リンデンバウムの補題

この節ではヘンキンの定理の証明を具体的に展開しよう．そこで前節最後の構想で述べたように，まずリンデンバウムの補題を示すことから始める．しかしそのためには次の補題 4.1 と定義が 2 つほど必要である．

補題 4.1　理論 K に現われる項の集合および論理式の集合は，各々可算である．

証明 まず項や論理式を構成する記号uの各々に，次のような仕方で奇数$g(u)$を対応させる．$g(()=3, g())=5, g(,)=7, g(\neg)=9, g(\supset)=11, g(\forall)=13$, $g(x_i)=7+8i$, $g(a_i)=9+8i$, $g(f_i^n)=11+8\times2^n\times3^i$, $g(P_i^n)=13+8\times2^n\times3^i$. その上で次に，項や論理式の有限個の記号列$u_1u_2\cdots u_r$に対して，$2^{g(u_1)}\times3^{g(u_2)}\times\cdots\times \mathrm{P}_r{}^{g(u_r)}$なる数を対応させる．ただし$\mathrm{P}_r$は$r$番目の素数を表わす．するとこのような対応によって，理論Kの個々の項や個々の論理式の１つ１つに，ある自然数が１対１に対応してくることは明らかであろう．よって項の集合，論理式の集合は各々可算的といえる． □

注意 i) 例を添えておく．$g(\forall x_1P_1{}^1x_1)=2^{13}\times3^{15}\times5^{61}\times7^{15}$. ii) $g(u)$をuの「ゲーデル数」(Gödel number)と呼び，gを「ゲーデル数づけ」(Gödel numbering)と呼ぶこともある．

定義 理論Kの任意の閉じた式Aが$\vdash_K A$または$\vdash_K \neg A$であるとき，理論Kは「完全」(complete)である，という．

注意 §4.1で定義した完全(性)とは異なった概念である．すなわち意味論的完全性ではなく，構文論的な完全性の概念である．文脈から区別がつくので同じ語を使うが，場合によっては，上の定義による完全を，「充満」(full)ということもある．

定義 理論K'が理論Kと同じ記号をもち，Kのすべての定理がK'の定理でもあるとき，K'はKの「拡大」(extension)である，という．

補題 4.2（リンデンバウムの補題） 理論Kが無矛盾であるなら，Kの無矛盾で完全な拡大である理論Jが存在する．

証明 [I]まずKの拡大となっている理論Jをつくる．そのために理論Kの閉じた式の枚挙$B_1, B_2, \cdots$を考え(なおこれは上の補題4.1によって可能である)，その上で次のように理論の列$J_0, J_1, J_2, \cdots$を定義していく．

1) J_0はK.

2) J_i(ただし$i\geq0$)は定義されているとして，i) $\vdash_{J_i}\neg B_{i+1}$でないときは，$J_{i+1}=J_i\cup\{B_{i+1}\}$とし，ii) $\vdash_{J_i}\neg B_{i+1}$のときは，$J_{i+1}=J_i$とする．

そしてさらに以上のように定義されるすべてのJ_iのすべての公理を公理とする理論をJとする．つまりJをJ_iの合併$J_0\cup J_1\cup J_2\cup\cdots$としてつくる．すると，各々の$J_i$のつくり方から，$J_{i+1}$が$J_i$の拡大であることは明らかであり，また$J$が$J_i$のすべて(もとより$J_0=K$も含めて)の拡大となっていることも明

らかであろう．

[II] 次に上のようにしてつくった理論Jが，1) 無矛盾であること，2) 完全であることを示そう．

1)について． i) 準備として各々のJ_iが無矛盾であることを，帰納法で示す．まずJ_0はKであるゆえ，補題の前提から明らかにJ_0は無矛盾である．次にJ_iが無矛盾であると仮定する．ここでもし$J_{i+1}=J_i$なら，もとよりJ_{i+1}も無矛盾であり，またもし$J_{i+1}\neq J_i$なら，[I]での定義から，$\vdash_{J_i}\neg B_{i+1}$でないゆえ，前節の補題3.2により，J_{i+1}も無矛盾である．よってすべてのJ_iが各々無矛盾であるといえる．

ii) Jが無矛盾であることを示す．そのためにJが矛盾していると仮定する(背理法)．すなわちJに矛盾を導き出す証明過程が存在するとする．ところで一般に証明過程は有限個の式からなり，そこに使われる公理も有限個である．よって，当然このJでの矛盾を導き出す証明過程は，あるJ_iでの矛盾を導き出す証明過程とみなせる．しかしi)により，J_iはすべて無矛盾であり，いかなるJ_iにも矛盾を導き出す証明過程など存在し得ない．よって背理法によりJは矛盾しているとはいえない．

2)について．AをKの任意の閉じた式とする．するとある$i(\geq 0)$が存在して，$A=B_{i+1}$が成立する(ただしB_{i+1}は[I]で述べた閉じた式の枚挙の中に現われる式とする)．ところで明らかに，$\vdash_{J_i}\neg B_{i+1}$かまたは$\vdash_{J_i}\neg B_{i+1}$でないかである．一方[I]でのJ_{i+1}のつくり方から，$\vdash_{J_i}\neg B_{i+1}$でないときは，B_{i+1}はJ_{i+1}の公理とされるゆえ，$\vdash_{J_{i+1}}B_{i+1}$といえる．よって，上の排中律と組み合せて，$\vdash_{J_i}\neg B_{i+1}$または$\vdash_{J_{i+1}}B_{i+1}$がいえる．するとここから，JはJ_i, J_{i+1}をはじめすべてのJ_iの公理を公理としているゆえ，$\vdash_J\neg B_{i+1}$または$\vdash_J B_{i+1}$を得る．すなわちJは完全である．

第1ヘンキンの定理

ヘンキンの定理自体は前節ですでに記しておいたが，念のため再び提示し，その上で証明を与えていこう．

定理4.3 (第1ヘンキンの定理) 無矛盾な理論はすべて可算モデルをもつ．

証明 (以下では無矛盾な理論をKで表わし，可算モデルをMで表わすこと

にする．また前節の構想で述べたように，証明はそれを大きく2つの部分[I]，[II]に分けて行なう．すなわち[I]は，理論Kを含む無矛盾で完全な理論Jをつくる部分である．また[II]は，そのJには容易に1つのモデルMが考えられることを示し，さらにそれがKのモデルにもなることを示す部分である.)

[I] Kを含み，リンデンバウムの補題が適用される無矛盾な理論K_ωを，次のような手順で導入する．

1) K_0について．　理論Kに現われない可算個の新しい個体常項$b_1, b_2, \cdots$をKの記号に加えてできる新しい理論を，K_0とする．したがってK_0の公理は，Kの固有公理と新しい常項にも適用が許された論理公理とからなっている．ところでこのK_0については次の(♯)が成立する．

(♯)　K_0はKを含み，しかも無矛盾である．

(♯)の証明　K_0は無矛盾でないと仮定する．すなわち，K_0のある式Aが存在して，$\vdash_{K_0} A \wedge \neg A$とする．いまこの証明に現われる$b_{i_1}, \cdots, b_{i_k}$を，この証明には現われない変項ですべて置きかえる．このような置きかえをしてももとよりこの証明の最後の式は矛盾している．しかしこの証明はもはや$b_{i_1}, \cdots b_{i_k}$のいずれをも含んでいない．よってこの証明はKにおける証明といえる．しかしこれはKが無矛盾であることと矛盾する．よってK_0は無矛盾である．なおK_0がKを含むことは，K_0の定義から明らかであろう．

2) K_nについて．　まず$A_1 x_{i_1}, A_2 x_{i_2}, A_3 x_{i_3}, \cdots, A_k x_{i_k}, \cdots$を，ただ1個の自由変項をもつ$K_0$の式のすべての枚挙とする(なおこれは補題4.1によって可能である)．次に新しい個体常項の列，$b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots$を以下のように選ぶ．すなわちb_{j_k}は$A_1 x_{i_1}, A_2 x_{i_2}, \cdots, A_k x_{i_k}$に含まれていず，しかも$b_{j_k}$は$b_{j_1}, \cdots, b_{j_{k-1}}$の各々とは異なっているものとする．さて以上のもとで次のような式(H_k)を，すなわち

(H_k)　$\neg \forall x_{i_k} \neg A_k x_{i_k} \supset A_k b_{j_k}$　　(i.e. $\exists x_{i_k} A_k x_{i_k} \supset A_k b_{j_k}$)

を考える．そしてK_0の公理にさらに$(\mathrm{H}_1) \sim (\mathrm{H}_n)$を公理として付加して得られる理論を，$K_n$とする．するとこの$K_n$については次の(♯♯)が成立する．

(♯♯)　任意のn(ただし$n \geq 1$)について，K_nはK_{n-1}の拡大であり，しかも無矛盾である．

(♯♯)の証明　K_nの無矛盾性についてはnについての帰納法で示していく．まずK_0は(♯)により無矛盾である．次にK_{n-1}は無矛盾であると仮定する．そ

の上でK_n(ただし$n \geq 1$)は無矛盾でないと仮定する(背理法). するとK_nでは任意の式が証明可能となる. よって$\vdash_{K_n} \neg(\mathrm{H}_n)$が成立する. すなわち$(\mathrm{H}_n) \vdash_{K_{n-1}} \neg(\mathrm{H}_n)$が成立し, よって$\vdash_{K_{n-1}} (\mathrm{H}_n) \supset \neg(\mathrm{H}_n)$となる. ここで$(A \supset \neg A) \supset \neg A$は論理的定理ゆえ, 結局$\vdash_{K_{n-1}} \neg(\mathrm{H}_n)$が成立する. すなわち$\vdash_{K_{n-1}} \neg(\neg\forall x_{i_n} \neg A_n x_{i_n} \supset A_n b_{j_n})$である. よって$\vdash_{K_{n-1}} \neg\forall x_{i_n} \neg A_n x_{i_n}$…(1)かつ$\vdash_{K_{n-1}} \neg A_n b_{j_n}$…(2)がいえる. すると, ここで$b_{j_n}$は$(\mathrm{H}_1), \cdots, (\mathrm{H}_{n-1})$に現われてこないことから, (2)より$\vdash_{K_{n-1}} \neg A_n x_l$を得る(ただし$x_l$は$K_{n-1}$における$\neg A_n b_{j_n}$の証明には現われてこない変項とする)*. よってGenを使って$\vdash_{K_{n-1}} \forall x_l \neg A_n x_l$. さらに$\neg A x_l$と$\neg A x_{i_n}$は相似であるゆえ, §3.2のDR 7により, $\vdash_{K_{n-1}} \forall x_{i_n} \neg A_n x_{i_n}$…(3)を得る. しかしこの(3)と(1)とを合せると, K_{n-1}は矛盾することになり, K_{n-1}の無矛盾性の仮定と矛盾する. よってK_nは無矛盾でなければならない. するとあとは帰納法により, 任意のnについて, K_nが無矛盾であることは明らかであろう. またK_nがK_{n-1}の拡大であること, すなわちK_nがK_{n-1}と同じ記号をもち, K_{n-1}の定理がすべてK_nの定理となることは, K_nの定義から明らかであろう.

注意 ＊の部分について. $\vdash_{K_{n-1}} \neg A_n b_{j_n}$とする. すると$B_1, \cdots, B_m (= \neg A_n b_{j_n})$なる$K_{n-1}$での証明が存在する. この証明に現われない変項$x_l$で上の証明の$b_{j_n}$のところをすべて置きかえた結果を$B_1', \cdots, B_m' (= \neg A_n x_l)$とする. するとこの$B_1', \cdots, B_m'$は$K_{n-1}$での$\neg A_n x_l$の証明といえる. よって$\vdash_{K_{n-1}} \neg A_n x_l$.

3) K_ωについて. K_0の公理に(H_k)(ただし$k=1, 2, 3 \cdots$)のすべてを公理として付加した理論を, K_ωとする. するとこのK_ωについては次の(###)が成立する.

(###) K_ωは任意のK_nの拡大であり, しかも無矛盾である.

(###)の証明 K_ωにおける証明はいかなる証明も高々有限個の(H_k)を含むのみであり, 結局それはあるK_nにおける証明と同じになる. よって(##)によりK_nのすべてが無矛盾である以上, K_ωも無矛盾といえる. またK_ωが任意のK_nの拡大であること, すなわち任意のnについてK_nの定理がすべてK_ωの定理となることなどは, K_ωの定義から明らかであろう.

さて以上により(H_k)(ただし$k=1, 2, 3, \cdots$)が成立する無矛盾な理論K_ωが導入できたが, するとさらにここにリンデンバウムの補題を適用して, K_ωの拡

大であり，しかも無矛盾で完全な理論の存在がいえてくる．そこでその理論を J とする．すると K_ω は K_0 の拡大であるゆえ，J が，K_0 の無矛盾で完全な拡大となっていることも，明らかである．

注意　登場した各理論の関係は，次の通り．念のため記しておく．

$L \subseteq K \subseteq K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_{n-1} \subseteq K_n \subseteq \cdots \subseteq K_\omega \subseteq J$

($K=L+K$ の固有公理，$K_0=K+\{b_1, b_2, \cdots\}$，$K_n=K_{n-1}+(\mathrm{H}_n)$，$K\omega \subseteq J$ はリンデンバウムの補題による．)

［II］以下の 1)，2) で理論 J のモデル M を考える．そして 3) で，その M が K_0 のモデルでもあること，さらに K のモデルにもなることを示す．

1) まず解釈の枠組 M(＝⟨D, R⟩) を次のように決める．

i) D:K_0 の閉じた項の集合とする．ただし「閉じた項」(closed term) とは変項を全く含まない項のことである．なお補題 4.1 により，このように決めた D が可算であることは明らかであろう．

ii) $\mathrm{R}[a_i]=a_i(\epsilon\,\mathrm{D})$．すなわち個体常項にはその個体常項自身を対応させる．

注意　J の個体常項は K_0 の個体常項と同じであり，K_0 の個体常項は K の個体常項（全くなくともよいが）と[I]の 1) で述べた $b_1, b_2, \cdots$ なる個体常項とからなる．ところでここでは，K_0 の個体記号について，K のそれと $b_1, b_2, \cdots$ とを記号上区別せずに，一括して $a_1, a_2, \cdots$ (i.e. a_i ただし $i=1, 2, \cdots$) で表わしている．

iii) $\mathrm{R}[f_i{}^n]=\bar{f}_i{}^n$ ただし $\bar{f}_i{}^n$ は D 上の n 項関数である (i.e. $\bar{f}_i{}^n:\mathrm{D}^n \to \mathrm{D}$)．

iv) $\mathrm{R}[P_i{}^n]=\bar{P}_i{}^n$ ただし $\bar{P}_i{}^n$ は D 上の n 項述語（関係）である (i.e. $\bar{P}_i{}^n \subseteq \mathrm{D}^n$)．しかも $\bar{P}_i{}^n$ は，その各項に $\vdash_J P_i{}^n t_1 \cdots t_n$ となる D の要素 $\bar{t}_j\,(1 \leq j \leq n)$ を代入したとき，その述語（関係）は成立する，といえるような述語（関係）である (i.e. $\bar{P}_i{}^n=\{\langle \bar{t}_1, \cdots, \bar{t}_n\rangle : \vdash_J P_i{}^n t_1 \cdots t_n$ かつ $\bar{t}_j=\mathrm{s}\star[t_j]\}$)．

2) 次に上の枠組 M のもとで式 A が真である (i.e. $\mathrm{M} \models A$) ことを考えてみる．しかし上のように決めた枠組 M のもとでは，一般に次の (♯) の関係が成立することが明らかとなる．

(♯)　$\mathrm{M} \models A \Leftrightarrow \vdash_J A$.

(♯) の証明　(A に含まれる $\neg, \supset, \forall$ の数についての帰納法で証明する．また A が閉じた式の場合のみを考えるだけで十分である．なぜなら，$\mathrm{M} \models A \Leftrightarrow \mathrm{M} \models A$ の閉包，$\vdash_J A \Leftrightarrow \vdash_J A$ の閉包が成立するからである．)

i) $A:P_i{}^n t_1 \cdots t_n$（ただし，ここでの $t_1, \cdots, t_n$ は閉じた項）のとき．すなわち A

が閉じた要素式のとき．このときまず$\mathrm{M}\models A$の定義により，

$$\mathrm{M}\models P_i^n t_1\cdots t_n \Leftrightarrow \bar{P}_i^n \bar{t}_1\cdots\bar{t}_n \ (\text{i.e.}\ \langle \bar{t}_1, \cdots, \bar{t}_n\rangle \in \bar{P}_i^n) \tag{1}$$

が成立する．一方，上の1)のiv)のMの決め方から，

$$\bar{P}_i^n \bar{t}_1\cdots\bar{t}_n \Leftrightarrow \vdash_J P_i^n t_1\cdots t_n \tag{2}$$

が成立する．よって(1)，(2)より(♯)が成立する．

注意 (1)について．定義では本来$\bar{P}_i^n\bar{t}_1\cdots\bar{t}_n$の成立と同値になるのは，$\mathrm{M},\mathrm{s}\models P_i^n t_1\cdots t_n$である．しかし閉じた要素式の場合は，$\bar{P}_i^n\bar{t}_1\cdots\bar{t}_n$の成立はsに関係せず，その成立は結局，すべてのsについて$\mathrm{M},\mathrm{s}\models P_i^n t_1\cdots t_n$であることと同値となり，よって$\mathrm{M}\models P_i^n t_1\cdots t_n$と同値になる．

ii) $A:\neg B$のとき．まず$\mathrm{M}\models B\Leftrightarrow\vdash_J B$とする(帰納法の仮定)．なお$A$は閉じた式ゆえ，$B$も閉じた式といえる．

a) ⇒について． $\mathrm{M}\models A$とすると，§4.2の定理2.1の1)により$\mathrm{M}\not\models B$．よって帰納法の仮定により，$\vdash_J B$でない．すると，一方でJは完全であり，Bは閉じた式ゆえ，$\vdash_J\neg B$である．すなわち$\vdash_J A$．

b) ⇐について． 対偶を示す．$\mathrm{M}\not\models A$とすると，$\mathrm{M}\models B$．帰納法の仮定により，$\vdash_J B$．するとJは完全ゆえ，$\vdash_J\neg B$ではない．すなわち$\vdash_J A$でない．

iii) $A:B\supset C$のとき．まずB, C各々に(♯)が成立するとする(帰納法の仮定)．なおこのときも，B, Cは各々閉じた式といえる．

a) ⇒について． 対偶を示す．すなわち$\vdash_J A$でないと仮定する．するとJが完全であることから，$\vdash_J\neg A$，すなわち$\vdash_J\neg(B\supset C)$．すると，一方で，$\neg(B\supset C)\supset B$および$\neg(B\supset C)\supset\neg C$が論理的定理であることから，$\vdash_J B$かつ$\vdash_J\neg C$を得る．すると$\vdash_J B$から帰納法の仮定により$\mathrm{M}\models B$がいえ，また$\vdash_J\neg C$からは，$J$が無矛盾であることにより，$\vdash_J C$でないといえる．すると後者から，帰納法の仮定により，さらに$\mathrm{M}\not\models C$がいえ，前者と合せて，$\mathrm{M}\not\models B\supset C$となる．すなわち$\mathrm{M}\not\models A$である．

b) ⇐について． 対偶を示す．すなわち$\mathrm{M}\not\models A$と仮定．すると$\supset$の定義から$\mathrm{M}\models B$かつ$\mathrm{M}\not\models C$．すると帰納法の仮定により，$\vdash_J B$かつ$\vdash_J C$でない，を得る．すると後者より，Jが完全であることから，$\vdash_J\neg C$がいえる．ところで$B\supset(\neg C\supset\neg(B\supset C))$は論理的定理ゆえ，これに上の$\vdash_J B$と$\vdash_J\neg C$と合せて，$\vdash_J\neg(B\supset C)$がいえる．すなわち$\vdash_J\neg A$である．するとさらに，$J$の無矛盾

性により，$\vdash_J A$ でない，となる．

iv) A:$\forall x_i B$ のとき．このとき B を [I] の 2) で述べた式の枚挙に現われる $\neg A_k x_{i_k}$ とみなし，x_i を x_{i_k} であるとみなすことができる．そしてこの $\neg A_k x_{i_k}$ の x_{i_k} に閉じた項を代入した式について，(♯)が成立しているとする(帰納法の仮定)．

a) ⇒について． 背理法で示す．すなわち M$\models A$ かつ $\vdash_J A$ でない，と仮定する．すると後者から J が完全であることにより，$\vdash_J \neg A$ i.e. $\vdash_J \neg\forall x_{i_k}\neg A_k x_{i_k}$ である．ところで $\vdash_J$ (H$_k$) ゆえ，結局 $\vdash_J A_k b_{j_k}$…(1) を得る．一方前者 M$\models A$ i.e. M$\models \forall x_{i_k}\neg A_k x_{i_k}$ からは M$\models \neg A_k b_{j_k}$ がいえる．すると帰納法の仮定により，$\vdash_J \neg A_k b_{j_k}$…(2) を得る．すると(1)，(2)よりいまや J は矛盾を含むことになる．しかしこれは J の無矛盾性と矛盾する．

b) ⇐について． 背理法で示す．すなわち M$\not\models A$ かつ $\vdash_J A$ と仮定する．すると前者より M$\not\models \forall x_{i_k}\neg A_k x_{i_k}$ ゆえ，K_0 のある閉じた項 t が存在して，M$\not\models \neg A_k t$ となる*．しかし一方後者 $\vdash_J A$ i.e. $\vdash_J \forall x_{i_k}\neg A_k x_{i_k}$ と，論理公理 $\forall x_{i_k}\neg A_k x_{i_k} \supset \neg A_k t$ とから $\vdash_J \neg A_k t$ を得る．すると帰納法の仮定により，M$\models \neg A_k t$ である．しかしこれは M$\not\models \neg A_k t$ と矛盾する．

注意 ＊のところを詳しく証明すると，以下のようになる．まず M$\not\models \forall x_{i_k}\neg A_k x_{i_k}$ とする．i.e. すべての s について M, s$\not\models \forall x_{i_k}\neg A_k x_{i_k}$ である，とする．するとここから，ある s が存在して M, s$\not\models \forall x_{i_k}\neg A_k x_{i_k}$ がいえ，さらに，ある s′ が存在して M, s′$\not\models \neg A_k x_{i_k}$ といえる．そこで，M, s′$\not\models \neg A_k x_{i_k}$ であるような s′ を s$_1$ で表わしてみると，M, s$_1\not\models \neg A_k x_{i_k}$…(1)となる．

ところでいま，この s$_1$ の i_k 番目の要素を t_{i_k} とする．t_{i_k} は領域の取り方から当然閉じた項であり，s$_1\star[t_{i_k}]=t_{i_k}$ が成立し，よって s$_1$=s$_1(i_k/t_{i_k})$=s$_1(i_k/$s$_1\star[t_{i_k}])$ がいえる．そこでこの s$_1(i_k/$s$_1\star[t_{i_k}])$ を s$_1'$ で表わすと，(1)より，M, s$_1'\not\models \neg A_k x_{i_k}$…(2)が成立してくる．

ところでまた，上の s$_1'$ は§4.2の，補題2.4の s′ とみなせるゆえ，この補題を使って，(2)からさらに，M, s$_1\not\models \neg A_k t_{i_k}$…(3)を得る．すると(3)から，ある s が存在して M, s $\not\models \neg A_k t_{i_k}$，i.e. M$\not\models \neg A_k t_{i_k}$ を得，よってここから，ある閉じた項 t が存在して，M$\not\models \neg A_k t$ である，が得られる．

さて以上により，(♯)が成立することははっきりした．そしてこの(♯)は，結局，J に属する式(すなわち J の定理)がすべて M のもとで真となることを表わしている．よって，1)で与えた解釈の枠組 M は，まさに理論 J のモデルであ

るといえるのである.

3) ところでJのモデルとなる上のMは，同時にK_0のモデルでもある．なぜなら，すでに[I]で見たように，JはK_0の拡大であることから，K_0の定理はすべてJの定理であり，よってK_0の定理はすべてMのもとで真となるからである．またこのMはさらにKのモデルでもある．なぜなら，K_0の定義から，Kの定理はすべてK_0の定理であり，よってKの定理もMのもとですべて真となるからである．しかもMに伴う解釈の領域Dが可算的であったことをも改めて注意するなら，いまや無矛盾な理論Kは可算モデルMをもつ，ということができるのである. □

第2ヘンキンの定理

ところで第2完全性定理の証明には，上で証明したヘンキンの定理ではなく，第2ヘンキンの定理と呼んだ定理4.7が前提された．そこで今度はこの定理の証明を与えることにしよう．しかしそのためには，第1ヘンキンの定理の系4.4と補題4.6が必要となる.

系4.4 理論Kの閉じた式からなる無矛盾な集合は，すべて可算モデルをもつ.

証明 ΓをKの閉じた式の無矛盾な集合とする．するとΓを新しい公理としてKに加えた理論$K \cup \Gamma$は無矛盾な理論となる．よってヘンキンの定理から$K \cup \Gamma$は可算モデルをもつ．したがってΓも可算モデルをもつ. □

注意 上の系で閉じた式と制限されるのは，証明の中でそれらが公理とされるからで，この点は§3.3で与えた理論の定義から明らかであろう.

補題4.5 Γを理論Kの論理式からなり，しかもKで無矛盾な集合とする．またK'をKに可算個の新しい個体常項を加えることによって得られる理論とする．このとき，ΓはK'でも無矛盾な集合である.

証明 対偶を示す．ΓをKの式からなり，しかもK'で矛盾している集合と仮定する．すると，K'のある式Bが存在して，$\Gamma \vdash_{K'} B \wedge \neg B$．ここでこの演繹における$K$にない個体常項を，この演繹に現われない変項で置きかえる．すると$\Gamma \vdash_K B' \wedge \neg B'$が成立する(ただし$B'$は$B$に$K$にない常項がある場合，それを新しい変項に置きかえた式とする)．よってΓはKでも矛盾している集

合となる. □

補題 4.6 Γ を理論 K の論理式からなり，しかも K で無矛盾な集合とし，その Γ に現われる自由変項を $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_k}, \cdots$ とする．また可算個の新しい常項 $b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_k}, \cdots$ を K に加えた理論を K' とし，Γ の自由変項 $x_{j_1}, \cdots, x_{j_k}, \cdots$ の各々に $b_{j_1}, \cdots, b_{j_k}, \cdots$ を代入して得られる K' の閉じた式の集合を Γ' とする．以上のとき，Γ' は K' の無矛盾な集合である．

証明 背理法で示す．すなわち Γ' は K' の矛盾した集合と仮定する．すると Γ' に属する有限個の式 $A_1', \cdots, A_n'$ と K' のある式 B' について，$A_1', \cdots, A_n' \vdash_K B' \wedge \neg B'$ が成立する(ただし A_i' は K の式 A_i の自由変項に対応する常項を代入したもの，B' も B を同様にしたものとする)．ここで演繹定理 DT を n 回使うと，$\vdash_{K'} A_1' \supset (\cdots (A_n' \supset (B' \wedge \neg B')) \cdots)$ を得る．ところで一般に $\vdash_{K'} A_k b_{j_k} \Rightarrow \vdash_{K'} A_k x_{j_k}$ が成立する*ゆえ，これを使ってさらに，$\vdash_{K'} A_1 \supset (\cdots (A_n \supset (B \wedge \neg B)) \cdots)$ となる．すると演繹定理 DT を使って，$A_1, \cdots, A_n \vdash_{K'} B \wedge \neg B$ となり，Γ は $A_1, \cdots, A_n$ を要素としていることから，$\Gamma \vdash_{K'} B \wedge \neg B$ となる．すなわち Γ は K の式からなり，しかも K' で矛盾した集合となる．そこで上の補題 4.5 の対偶を使うと，Γ は K の式からなり，しかも K で矛盾した集合といえる．しかしこれは補題 4.6 での Γ の規定と矛盾する． □

注意 ＊について．定理 4.3 の[I]の(♯)の証明での議論を参照せよ．

定理 4.7 (第 2 ヘンキンの定理) 理論 K の論理式からなる集合 Γ が無矛盾であれば，Γ は可算領域で同時に充足可能である．

証明 Γ を無矛盾とすると，上の補題 4.6 から，K' の式からなり，しかも K' で無矛盾な集合 Γ' が考えられる．すると，Γ' は明らかに閉じた式のみからなるゆえ，系 4.4 により，Γ' は可算モデル M をもつ．すなわち，その M の領域から考えられる列 s のすべてが，Γ' に属する各々の式を充足する．そこでそうした列 s のうちには，次のようなものが存在するといえる．すなわち，いま K' での変項の枚挙の順番で x_{j_1} が m_1 番目，x_{j_2} が m_2 番目，…であるとして，s の m_1 番目の要素が b_{j_1} であり，m_2 番目の要素が b_{j_2} であり，…というような s が存在するといえる．すると，この列 s が Γ に属する各々の式を充足することは明らかであろう．よって，Γ の各式は同時に充足することが示された．また M の領域が可算的であることは，系 4.4 より明らかである． □

◇ 公理系 L_1 の完全性の証明

命題論理の公理系 L_1 に限れば，その完全性はヘンキンの定理を介さずに簡単に証明できることが知られている．カルマール Kalmár による証明で，以下参考までに記しておこう．

補題　$P_1', \cdots, P_n' \vdash A'$　　ただし $P_i(1 \leq i \leq n)$ は A を構成している要素式であり，P_i' は，P_i が1のとき P_i を表わし，P_i が0のとき $\neg P_i$ を表わすとする．また A' は，A が1のとき A を表わし，A が0のとき $\neg A$ を表わすとする．

証明　(帰納法で示す.) 1) A が要素式 P のとき．この場合 $P' \vdash A'$ は，P が1のとき，$P \vdash P$ であり，また P が0のとき，$\neg P \vdash \neg P$ である．しかしこれらの各々が成立することはT1より明らか．

2) i) A が $\neg B$ のとき．まず B を1とする．すると B' は B，また A は0となるゆえ，A' は $\neg A$ である．さてすると帰納法の仮定により，$P_1', \cdots, P_n' \vdash B'(=B)$ であり，また $\vdash B \supset \neg\neg B$(T3)ゆえ，MP を使って，$P_1', \cdots, P_n' \vdash \neg\neg B(=\neg A = A')$ を得る．次に B を0とする．そして同様に考える．略．

ii) A が $B \supset C$ のとき．まず B を0とする．すると B' は $\neg B$ であり，また A は1となるゆえ，A' は A である．さてすると，帰納法の仮定により，$P_1', \cdots, P_n' \vdash B'(=\neg B)$ であり，また $\vdash \neg B \supset (B \supset C)$(T4)ゆえ，MP を使って，$P_1', \cdots, P_n' \vdash B \supset C(=A=A')$ を得る．次に C を1とする．そして同様に考える．略．さらに，B を1，C を0とする．すると B' は B，C' は $\neg C$ であり，また A は0となるゆえ，A' は $\neg A$ である．さてすると帰納法の仮定により，$P_1', \cdots, P_n' \vdash B'(=B)$ および $P_1', \cdots, P_n' \vdash C'(=\neg C)$ であり，一方，$\vdash B \supset (\neg C \supset \neg(B \supset C))$(T7)ゆえ，MP を2回使って，$P_1', \cdots, P_n' \vdash \neg(B \supset C)$ $(=A=A')$ を得る．　□

定理　A がトートロジーであるなら，A は定理(L_1 の)である．

証明　A をトートロジーとする．また A を構成している要素式を $P_1, \cdots, P_n$ とする．すると P_n が1でも0でも A は1である．よって上の補題により，$P_1', \cdots, P_{n-1}', P_n \vdash A$ および $P_1', \cdots, P_{n-1}', \neg P_n \vdash A$ が成立する．すると各々に L_1 の DR1(DT)を適用して，$P_1', \cdots, P_{n-1}' \vdash P_n \supset A$ および $P_1', \cdots, P_{n-1}' \vdash \neg P_n \supset A$ を得る．一方，$\vdash (P_n \supset A) \supset ((\neg P_n \supset A) \supset A)$(T8)ゆえ，上の2式と組み合せて，$P_1', \cdots, P_{n-1}' \vdash A$ を得る．さてすると，あと同じ議論を $n-1$ 回繰り返すことにより，$\vdash A$ を得ることは明らかであろう．　□

◇ LST とコンパクト定理

ヘンキンの定理から，いわばその系として直ちに得られる定理を，2つほど添えておく．本書では，これらを後にとくに使用するわけではないが，いずれも種々の応用をもつ有名なものである．

LST について　まず「レーベンハイム・スコーレムの定理」(Löwenheim-Skolem's Theorem. LST と略記する)を見よう．これはモデルの台となる解釈の領域の濃度についての基本となる定理である．

定理(LST)　モデルをもつ任意の理論 K は可算モデルをもつ．

証明　次の定理とヘンキンの定理から直ちに得られる．　□

定理＊　理論 K がモデルをもてば，理論 K は無矛盾である．

証明　K のモデルを M とする．その上で K は矛盾していると仮定する(背理法)．すると A と $\neg A$ とがともに K の定理となるようなある閉じた式 A が存在する．するとまたこの A と $\neg A$ はともに M で真であるといえる．しかしこれは不可能．よって K は無矛盾である．　□

参考　第１階の理論はすべて可算モデルで解釈できるという LST の内容は，不思議に感じられた時があった．というのは，非可算無限をも取り扱う実数の理論が可算モデルで解釈できることになり，一見パラドックスに思われたからである(これを「スコーレムのパラドックス」(Skolem's paradox)という)．しかしこれは別にパラドックスとはならない．なぜか．考えてみるとよいであろう．

コンパクト定理　もう１つ，「コンパクト定理」(Compact Theorem)と呼ばれるものを見ておく．

定理(コンパクト定理)　理論Kの固有公理から任意有限個の公理を取り出してできる理論がモデルをもつならば，理論Kはモデルをもつ．

証明　理論Kがモデルをもたないと仮定する(背理法)．するとヘンキンの定理の対偶を使って，K は矛盾しているといえる．すなわち A と $\neg A$ とがともに K の定理となるようなある閉じた式 A が存在する．つまり K には，$A \wedge \neg A$ の証明が存在する．するとこの証明に使用される公理は有限であり，よってその公理を含む理論は，定理の前提より，モデルをもつといえる．すると上の定理＊により，この理論は無矛盾である．しかし $A \wedge \neg A$ が証明される理論でもあるゆえ，この理論は矛盾した理論である．これは矛盾である．　□

参考　この定理は，たとえば自然数や実数の公理系に対して，各々通常の自然数や実数を当てて解釈する「標準モデル」(standard model)とは別に，「超準モデル」(non-standard model)が存在し得ることを保証する．そこでこの点を，自然数の場合で簡単に説明しておこう．

まず自然数の公理系 N に，新たに $c \neq 0, c \neq 1, c \neq 2, \cdots$ を公理として加えた公理系 N' を考える．その上で，この新しい公理群の任意有限個と N の公理からなる理論を考えてみる．するとこの場合は，いつも明らかにモデルをもつといえる．たとえば，$N \cup \{c \neq 0, c \neq 1, c \neq 2, c \neq 3\}$ の場合は，通常のモデル M に，c を 4 とする解釈を加えたもの M^* を

考えればよいからである．さてするといまやコンパクト定理が適用でき，N'にもモデル M′ が存在することが主張できる．しかし，$c \neq 4, c \neq 100$ などすべて N' の公理であり，それらは M′ で真でなければならず，M′ では c を 4 と解釈したり，100 と解釈することはできない．つまり M′ は M や M* とは同型ではない．とはいえ M′ は N' のモデルゆえ，N や $N \cup \{c \neq 0, c \neq 1, c \neq 1, c \neq 2, c \neq 3\}$ のモデルでもあり，結局 N には通常のモデルとは別に，超準モデル M′ が存在するといえるのである．なお，M′ では上の c は，通常の M では認められない超自然数としての「無限大」(infinite) と解釈される．

同様のことは実数についても議論でき，実数の超準モデルが考えられる．そこでは，普通は認められない「無限小」(infinitesimal) や「無限大」が超実数として市民権を得ている．なおこうした無限小などを認めた解析は「無限小解析」(non-standard analysis) と呼ばれ，最近広く知られてきている．

◇ 公理系 L_1, L の公理の独立性

公理系 L_1 の A 1〜A 3 の独立性の証明　命題論理の公理系 L_1 の公理 A 1, A 2, A 3 が互いに独立であることを示してみよう．

1) A 1 の独立性の証明　まず条件法 ⊃，否定 ¬ に対して，通常の 2 値的な解釈ではなく，各々表 4.1，表 4.2 によって，3 値の真理関数としての解釈を与えることにする．

表 4.1

A	B	$A \supset B$
2	2	2
2	1	0
2	0	0
1	2	2
1	1	2
1	0	0
0	2	2
0	1	2
0	0	2

表 4.2

A	$\neg A$
2	0
1	2
0	2

表 4.3

A	B	$A \supset B$
2	2	2
2	1	0
2	0	1
1	2	2
1	1	0
1	0	2
0	2	2
0	1	2
0	0	2

表 4.4

A	$\neg A$
2	1
1	2
0	1

その上で A 2, A 3 の 3 つの公理を真理値分析すると，A 2 と A 3 は，つねに 2 となることが分かる．また MP については，A が 2，$A \supset B$ が 2 のとき，B を 2 とするものであることも分かる．すると A 2 と A 3 と MP によって得られる定理はすべて 2 という値をもつと考えられる．しかし一方で A 1 は，その真理値分析によって，2 とならない場合のあることが示せる．よって A 1 は決して A 2, A 3 の定理とはならないことが分かる．

2) A 2 の独立性の証明　A 1 の場合と全く同様の議論によって証明される．ただし

今度は，⊃, ¬ に対しては，各々表4.3，表4.4のような解釈を与えることにする．

3) A 3の独立性の証明　A 3の場合も同様の議論によって説明できる．しかしここでは，$n(A)$を利用する．ただし$n(A)$とは，Aの中に現われる ¬ 記号をすべて消去して得られる式のことである．実際A 1, A 2，各々の$n(\ )$を考えると，A 1, A 2が ¬ を全く含まないことから，n(A 1), n(A 2)は明らかにトートロジーである．しかもMPについても，$n(A), n(A \supset B)$がトートロジーなら$n(B)$がトートロジーになることは明らかである．しかし一方でn(A 3)はもはやトートロジーでないことが示せる．よってA 3はA 1, A 2の定理とは決してならないことが分かる．　□

公理系 L のA 1～A 5の独立性の証明　次に述語論理の公理系Lの公理A 1, A 2, A 3, A 4, A 5が，互いに独立であることを示してみる．

1) A 1の独立性の証明　まず$m(A)$で，論理式Aに現われる限量記号や項のすべてを，それらに伴う括弧などとともに，Aから消去して得られる式を表わすことにする．そして各公理の$m(\ )$を考える．するとA 1, A 2, A 3は命題論理の公理系L_1の公理A 1, A 2, A 3と同じになり，またm(A 4), m(A 5)はいずれも$A \supset A$の形となってくる．次にその上で，命題論理のA 1の独立性の証明と同様の議論をする．すなわちまず⊃, ¬ に対して各々表4.1，表4.2の解釈を採用する．するとA 1を除いて他はすべてつねに2となる式となる．また一方$m(\ )$の適用されたMP, Genがいずれも2を保つ規則であることは明らかである．よってA 1は，決して他の4つの公理の定理とはならないことが分かる．

2) A 2の独立性の証明　まず$l(A)$で，論理式Aに現われる項や$\forall x_i$のx_iのすべてを，それらに伴う括弧などとともに，Aから消去して得られる式を表わすことにする．するとA 1, A 2, A 3はL_1のA 1, A 2, A 3と同じ形になり，l(A 4)は$\forall A \supset A$, l(A 5)は$\forall(A \supset B) \supset (A \supset \forall B)$の形となってくる．次にその上で，⊃, ¬ については各々表4.3，表4.4の解釈を，∀については新たに表4.5のような解釈を採用してみる．

表 4.5

A	$\forall A$
2	2
1	0
0	0

するとA 2を除いて他はすべて2となる．また一方，$l(\ )$の適用されたMP, Genがいずれも2を保つことも明らかである．よってA2は他の公理の定理となることはない．

3) A 3の独立性の証明　この場合は，まず各公理の$m(\ )$を考える．その上で命題論理の公理系L_1の公理A 3の独立性の証明と同様に，$n(\ )$を使った議論で証明する．

4) A 4の独立性の証明　論理式中に現われる全称記号$\forall x_i$をすべて存在記号$\exists x_i$に置きかえることを考える．するとA 4は$\exists x_i A x_i \supset At$となり妥当式ではなくなる．それに対し他の公理は，上の置きかえによってもその妥当性は変らない．また一方MP, Genが，上の置きかえをしても，妥当性を保っていく推論規則であることは明らかであろう．よってA 4が他の公理の定理となることはない．

5) A 5の独立性の証明　今度は，論理式中のすべての項をx_1に変え，すべての全称

記号を $\forall x_1$ に置きかえることを考える．するとA5は $\forall x_1(Ax_1 \supset Bx_1) \supset (Ax_1 \supset \forall x_1 Bx_1)$ などとなり，妥当式ではなくなる．それに対し他の公理は上の操作によってもその妥当性は変らない．またMP, Genが，上の操作によっても，妥当性を保っていく推論規則であることは明らかである．よってA5が他の公理の定理となることはない．　□

注意　上に見た論理の公理の場合からも分かるように，一般に公理の独立性の証明は，独立性が問題となっている公理は成立せず，それを除いた公理群はすべて成立してくるようなある解釈(あるいはモデル)を上手に見つけることが，その要点となる．

第5章　ブール代数と論理

論理では表現間の推論関係が中心的なテーマであるが，この推論関係は一種の順序関係とみなすことができる．そしてこの視点から論理を見直すとき，論理は，半順序集合の一種といえるブール代数と対応していることが示せる．そこでまず§5.1において，一応論理とは切り離してブール代数というものを導入し，しかも§5.2と§5.3とで，その構造上の特性などをまとめておくことにする．その上で§5.4と§5.5において，ブール代数と論理とを結びつけ，§5.2や§5.3で明らかとなったブール代数がもつ性質を使って，論理の問題とくに完全性の問題の理解を深めることにする．とにかく論理をブール代数と対応させることにより，論理の結合子の意味をはじめ，ヘンキンの定理の意味などが，抽象的ではあるが改めて鮮明になってくるのである．

§5.1　束とブール代数

ブール代数とは構造をもった集合の1つで，その公理を示すことによって直接定義することができる．しかしここでは，直観的にも近づきやすくするため，まず半順序集合を定義し，次にその特殊なものとして束を導入し，さらにその特殊なものとしてブール代数を導入するという仕方で進める．

半順序集合

定義　次の1)～3)を満たす関係$\leq$を「半順序関係」または「半順序」(partial order)といい，集合$\mathcal{O}$の要素の間に半順序が定義されているとき，その集合$\mathcal{O}$を「半順序集合」(partially ordered set)という．

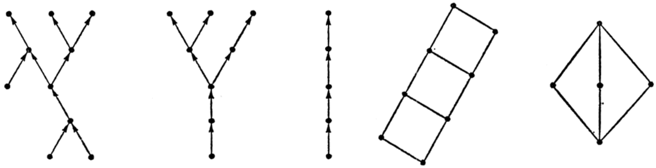
1)　$a \leq a.$

2)　$a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b.$

3)　$a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \leq c.$

注意　1), 2), 3)の性質は各々「反射性」(reflexivity),「反対称性」(asymmetry),「推移性」(transitivity)と呼ばれる.

以下とくに断らない限り，$\mathcal{O}$は半順序集合を表わすことにする．また有限個の要素からなる半順序集合は図示できる．参考のため，簡単なものを例示しておこう.



(1)　(2)　(3)　(4)　(5)

図 5.1

(ただし点は$\mathcal{O}$の要素を，点を結ぶ矢線――(4), (5)では省略――は半順序を表わす.)

定義　$\mathcal{O}$の2つの要素a, bに，$a \leq b$または$b \leq a$または$a = b$のうちの1つが成立しているとき，a, bは「比較可能」(comparable)であるという．そして$\mathcal{O}$に属する任意の2つの要素a, bがつねに比較可能であるとき，そうした$\mathcal{O}$は「線形順序集合」(linearly ordered set) であるという.

注意　図5.1の(3)が，その一例.

定義　1) $\mathcal{O}$の要素aが，$\mathcal{O}$のすべての要素xについて，$a \leq x$なら$x = a$であるとき*，aを$\mathcal{O}$の「極大元」(maximal element)という.

2) $\mathcal{O}$の要素aが，$\mathcal{O}$のすべての要素xについて，$x \leq a$なら$x = a$であるとき**，aを$\mathcal{O}$の「極小元」(minimal element)という.

注意　*(**)は結局，a自身以外にはaより大きい(小さい)ものはない，ということ.

定義　1) $\mathcal{O}$の要素aが，$\mathcal{O}$のすべての要素xについて，$x \leq a$であるとき，aを$\mathcal{O}$の「最大元」(the greatest element)という．そしてもし最大元が存在するときは，それを以下では1で表わすことにする.

2) $\mathcal{O}$の要素aが，$\mathcal{O}$のすべての要素xについて，$a \leq x$であるとき，aを$\mathcal{O}$の「最小元」(the least element)という．そしてもし最小元が存在するときは，それを以下では0で表わすことにする.

注意　最大元，最小元は必ず存在するとは限らない．しかし存在するときは，各々一意的に決ってくる．念のため最大(小)元と極大(小)元との違いを図示しておく(図5.2).

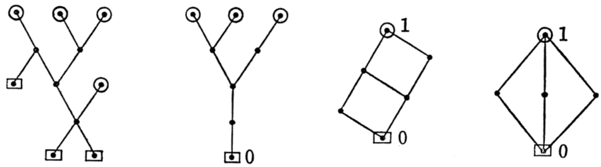


図 5.2

○印：極大元，□印：極小元，1：最大元，0：最小元.

定義　1) $\mathcal{O}$ の要素 a が，$\mathcal{O}$ の部分集合 M のすべての要素 x について，$x \leq a$ であるとき，a を M の「上界」(upper bound)という．

2) $\mathcal{O}$ の要素 a が，$\mathcal{O}$ の部分集合 M のすべての要素 x について，$a \leq x$ であるとき，a を M の「下界」(lower bound)という．

定義　1) $\mathcal{O}$ の要素 a が，まず i) $\mathcal{O}$ の部分集合 M の上界であり，しかも ii) M のすべての上界 y について，$a \leq y$ であるとき，a を M の「最小上界」(the least upper bound)という．そしてそれを $\sup M$ で表わす．

2) $\mathcal{O}$ の要素 a が，まず i) $\mathcal{O}$ の部分集合 M の下界であり，しかも ii) M のすべての下界 y について，$y \leq a$ であるとき，a を M の「最大下界」(the greatest lower bound)という．そしてそれを $\inf M$ で表わす．

注意　i) 最小上界，最大下界は各々，「上限」(supremum)，「下限」(infimum)と呼ばれることもある． ii) 上限，下限は必ず存在するとは限らない．しかし存在すればどちらも一意的に決まる．

束

定義　$\mathcal{O}$ の任意の2要素 a, b からなる $\mathcal{O}$ の部分集合 $\{a, b\}$ が，つねに $\sup\{a, b\}$ と $\inf\{a, b\}$ とをもつとき，半順序集合 $\mathcal{O}$ を「束」(lattice)といい，以下 $\mathcal{O}$ の代りに $\mathcal{L}$ で表わすことにする．

注意　図5.1の(1)，(2)は束とはいえない．

定義　1) $\sup\{a, b\}$ を $a \cup b$ と表わし，a と b の「結び」(join)という．

2) $\inf\{a, b\}$ を $a \cap b$ と表わし，a と b の「交わり」(meet)という．

補題 1.1　1) $a \cup b$ については次の i), ii) が成立する．

i) $a \leq a \cup b$ および $b \leq a \cup b$.

ii) $a \leq c,\ b \leq c$ なら $a \cup b \leq c$.

2) $a \cap b$ については次の i), ii) が成立する.

i) $a \cap b \leq a$ および $a \cap b \leq b$.

ii) $c \leq a,\ c \leq b$ なら $c \leq a \cap b$.

証明 1)の i)は $a \cup b$ が $\{a, b\}$ の上界であること，1)の ii)は $a \cup b$ が $\{a, b\}$ の上界の中で最小であることを示している．よって $\sup\{a, b\}$ の定義から i), ii) が成立することは明らか．2)の i), ii)についても同様. □

補題 1.2 1) $a \leq b \Leftrightarrow a \cap b = a$.

2) $a \leq b \Leftrightarrow a \cup b = b$.

証明 1) ⇒について． まず補題1.1の 2)の i)より $a \cap b \leq a \cdots (1)$. また反射性より $a \leq a$, 前提(⇔の左辺)より $a \leq b$ ゆえ，補題1.1の 2)の ii)より，$a \leq a \cap b \cdots (2)$. よって(1), (2)から反対称性により，$a \cap b = a$ を得る．

⇐について． 補題1.1の 2)の i)より $a \cap b \leq b \cdots (1)$. ところで前提(⇔の右辺)より $a \cap b = a$ ゆえ，これを(1)に代入すると，$a \leq b$ を得る．

2)略．1)と同様に. □

定理 1.3 束 $\mathscr{L}$ では以下の各式が成立する．

1) i) $a \cup b = b \cup a$ 　 2) i) $a \cap b = b \cap a$

ii) $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$ 　 ii) $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$

iii) $a \cup (a \cap b) = a$ 　 iii) $a \cap (a \cup b) = a$

証明 1)の i)について． $\{a, b\} = \{b, a\}$ ゆえ，$\cup$の定義から明らか．

1)の ii)について． まず $a \cup (b \cup c) \leq (a \cup b) \cup c \cdots (1)$ を示すことを考える．補題1.1の 1)の i)により，$a \leq a \cup b \leq (a \cup b) \cup c \cdots (2)$. 同じく，$b \leq a \cup b \leq (a \cup b) \cup c \cdots (3)$. 同じく，$c \leq (a \cup b) \cup c \cdots (4)$. すると(3), (4)および補題1.1の 1)の ii)により，$b \cup c \leq (a \cup b) \cup c \cdots (5)$を得る．すると(2), (5)および補題1.1の 1)の ii)により，(1)が示せる．次に同様にして，$(a \cup b) \cup c \leq a \cup (b \cup c) \cdots (6)$を示す．すると(1), (6)から反対称性により，1)の ii)を得る．

1)の iii)について． まず $a \cup (a \cap b) \leq a \cdots (1)$ を示すことを考える．反射性より $a \leq a \cdots (2)$. 補題1.1の 2)の i)より，$a \cap b \leq a \cdots (3)$. すると(2), (3)および補題1.1の 1)の ii)により，(1)が示せる．ところで $a \leq a \cup (a \cap b) \cdots (4)$ は，補題

1.1の1)のi)より明らか．よって(1)，(4)から反対称性により，1)のiii)を得る

2)のi)，ii)，iii)について．略．上記した1)のi)，ii)，iii)と同様にして示せる．□

注意　1)，2)とも i)は交換性，ii)は結合性，iii)は吸収性を表わしている．なおこれらの式は，束の公理とされることもある．すなわちその場合上の各式を満たす演算$\cup$，$\cap$が定義された集合は束である，という定義がなされる．

定理1.4　$\mathscr{L}$では以下の各式が成立する．

1)　i)　$a \cup a = a$　　ii)　$a \cap a = a$

2)　i)　$(a \cap b) \cup (a \cap c) \leq a \cap (b \cup c)$

ii)　$a \cup (b \cap c) \leq (a \cup b) \cap (a \cup c)$

証明　1)について．i)，ii)とも補題1.2と反射性$a \leq a$より明らか．

2)のi)について．　まず明らかに$(a \cap b) \leq a$…(1)および$(a \cap c) \leq a$…(2)．よって(1)，(2)および補題1.1の1)のii)により，$(a \cap b) \cup (a \cap c) \leq a$…(3)．一方，$(a \cap b) \leq b \leq (b \cup c)$…(4)．$(a \cap c) \leq c \leq (b \cup c)$…(5)．よって(4)，(5)および補題1.1の1)のii)により，$(a \cap b) \cup (a \cap c) \leq b \cup c$…(6)．すると(3)，(6)および補題1.1の2)のii)により，$(a \cap b) \cup (a \cap c) \leq a \cap (b \cup c)$を得る．

2)のii)について．略．2)のi)と同様に．□

注意　1)は巾等律，2)は「片側分配律」(one-sided distributive law)と呼ばれる．なお$\mathscr{L}$では上記した片側分配律の逆は一般には成立しない．

定義　次の1)，2)が成立する束$\mathscr{L}$を「分配束」(distributive lattice)という．

1)　$a \cap (b \cup c) \leq (a \cap b) \cup (a \cap c)$

2)　$(a \cup b) \cap (a \cup c) \leq a \cup (b \cap c)$

注意　定理1.4の2)を考え合せるなら，結局分配律が成立する束が分配束ということである．なお，非分配的な束としては，図5.1の(5)がその例となる．

定義　最大元1，最小元0が存在する束$\mathscr{L}$の要素a, bが，次の1)，2)を満たすとき，bをaの「補元」(complement)といい，a^cで表わす(あるいは，aはbの補元といい，b^cで表わす)．

1)　$a \cup b = 1$　　2)　$a \cap b = 0$

注意　1)，2)を「相補律」(law of complement)という．また1)，2)をbの代りにa^cを使って書くと，1)　$a \cup a^c = 1$，　2)　$a \cap a^c = 0$となる．

定義　束$\mathscr{L}$の任意の要素aにつねに補元a^cが存在するとき，束$\mathscr{L}$を「相補

束」(complemented lattice)という．

問　1) 定理1.3の2)のi),ii),iii)を証明せよ．　2) 定理1.4の2)のii)を証明せよ．

ブール代数

定義　束$\mathcal{L}$が分配束でありかつ相補束であるとき，$\mathcal{L}$を「ブール代数」(Boolean algebra)あるいは「ブール束」(Boolean lattice)という．なお以下ではブール代数は$\mathcal{B}$で表わすことにする．

定理1.5　ブール代数$\mathcal{B}$では次の各式が成立する．

1) i) $a\cup b=b\cup a$　　2) i) $a\cap b=b\cap a$

ii) $a\cup(b\cup c)=(a\cup b)\cup c$　　ii) $a\cap(b\cap c)=(a\cap b)\cap c$

iii) $a\cup(a\cap b)=a$　　iii) $a\cap(a\cup b)=a$

iv) $a\cap(b\cup c)=(a\cap b)\cup(a\cap c)$　　iv) $a\cup(b\cap c)=(a\cup b)\cap(a\cup c)$

v) $(a\cap a^c)\cup b=b$　　v) $(a\cup a^c)\cap b=b$

証明　1)のi)～iv)および2)のi)～iv)のいずれも$\mathcal{B}$の定義から明らか．また1)のv)は，補題1.2より，$a\cap a^c\leq b$であり，これは$a\cap a^c$が任意のbより小，すなわち$a\cap a^c$が最小元0であることを表わしている．すなわちそれは相補律の2)に他ならず，成立することは定義から明らか．2)のv)も同様である．　□

注意　上の各式は，ブール代数の公理とされることがある．

定理1.6　$\mathcal{B}$では次の1)～4)が成立する．

1) aの補元a^cは一意的に決る．

2) $a^{cc}=a$

3) i) $(a\cup b)^c=a^c\cap b^c$　　ii) $(a\cap b)^c=a^c\cup b^c$

4) $a\leq b$なら$b^c\leq a^c$である．

証明　1) aの補元としてb_1とb_2の2つを考えてみる．すなわち$a\cup b_1=1$, $a\cap b_1=0$…(1), $a\cup b_2=1$, $a\cap b_2=0$…(2)とする．ここでまず$b_1\leq b_2$…(3) i.e. $b_1=b_1\cap b_2$であることを次のようにして示す．

$$\begin{aligned}b_1&=b_1\cap 1 &&(b_1\leq 1\text{ ゆえ})\\&=b_1\cap(a\cup b_2) &&((2)\text{より})\\&=(b_1\cap a)\cup(b_1\cap b_2) &&(\text{分配律})\end{aligned}$$

$= b_1 \cap b_2$ ((1)と定理1.5 1)の v)より).

次に同様にして $b_2 \leq b_1$…(4) i.e. $b_2 = b_2 \cap b_1$ を示す．すると(3)，(4)より，$b_1 = b_2$ を得る．

2) $a \cup a^c = 1, a \cap a^c = 0$ より a は a^c の補元である．また a^{cc} は a^c の補元である．すると上の 1)により，$a^{cc} = a$ となる．

3) i) $a^c \cap b^c$ が $a \cup b$ の補元であることを示せばよい．しかしこれは，次のようにして相補律(1)，(2)が成立することから明らか．

$$(a \cup b) \cup (a^c \cap b^c) = (a \cup b \cup a^c) \cap (a \cup b \cup b^c) \qquad \text{(分配律)}$$
$$= 1 \cap 1 = 1 \cdots (1).$$
$$(a \cup b) \cap (a^c \cap b^c) = (a \cap a^c \cap b^c) \cup (b \cap a^c \cap b^c) \qquad \text{(分配律)}$$
$$= 0 \cup 0 = 0 \cdots (2).$$

3) ii) 上の 3)の i)と同様に．

4) $a \leq b$ i.e. $a \cup b = b$ とする．すると $b^c = (a \cup b)^c = a^c \cap b^c$ (3)の i)により). i.e. $b^c \leq a^c$ である． □

ところでブール代数の例としては，後述するように命題論理などがまさにその1つであるが，ここではより典型的な例を1つ挙げておく．それは，集合 S が与えられたとして，その S の部分集合を要素とする集合(i.e. S の巾集合)である．実際この集合は，部分集合間の包含関係 $\subseteq$ を半順序としたブール代数となっている．そしてそこでは，全集合としての S, 空集合 ϕ が各々最大元1，最小元0に対応しており，合併∪，共通部分∩，補集合 ^{c} の各演算が，各々結び $\cup$，交わり $\cap$，補元 ^{c} に対応している．なお，$S = \{a, b, c\}$ とした場合のこのブール代数を，念のため図示しておく(図5.3)．

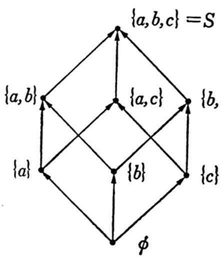


図5.3

注意 →で ⊆ を表わしている．

擬似ブール代数など

定義 a, b, x を束 $\mathscr{L}$ の要素とするとき，$a \cap x \leq b$ を満たす最大の x を，b に

対する a の「相対擬補元」(relative pseudo-complement)といい，それを $a\supset b$ で表わす.

注意 上の定義は，$a\supset b \underset{\text{df}}{=} \max\{x : a\frown x\leq b\}$ とも書ける.

補題 1.7 1) $a\frown(a\supset b)\leq b$ 2) $a\frown x\leq b \Rightarrow x\leq(a\supset b)$

3) $x\leq(a\supset b) \Rightarrow a\frown x\leq b$

証明 1)は $a\supset b$ の定義から明らか. 2)も，$a\supset b$ が $a\frown x\leq b$ を満たす x の最大のものであることを表わしており，定義から明らか.

3) $x\leq(a\supset b)$ i.e. $x\frown(a\supset b)=x$…(1)を仮定する. その上で，$a\frown x\leq b$ i.e. $(a\frown x)\frown b=x\frown a$ が成立することを次のように示す. なおその際，1)の $a\frown(a\supset b)\leq b$ i.e. $a\frown(a\supset b)\frown b=a\frown(a\supset b)$…(2)も利用する.

$$\begin{aligned}(a\frown x)\frown b &= a\frown(x\frown(a\supset b))\frown b && ((1)による)\\ &= x\frown a\frown(a\supset b) && ((2)による)\\ &= x\frown(a\supset b)\frown a = x\frown a && ((1)による).\end{aligned}$$ □

定義 束 $\mathcal{L}$ の任意の要素 a, b について，相対擬補元が存在するとき，束 $\mathcal{L}$ を「相対擬補束」(relatively pseudo-complemented lattice)という.

定理 1.8 1) 相対擬補束は最大元1を含む.

2) 相対擬補束は分配束である.

証明 1) $a\supset a$ が最大元となることを示す. まず補題1.1の2)のi)によって，$a\frown x\leq a$. よって補題1.7の2)から $x\leq a\supset a$ を得る. ここで x は任意ゆえ，結局 $a\supset a=1$ である.

2) $a\frown(b\smile c)\leq(a\frown b)\smile(a\frown c)$…(1)を示せばよい(逆は束であることから成立しているゆえ). まず≦の右辺を d とおく. すなわち $(a\frown b)\smile(a\frown c)=d$ とする. すると明らかに $a\frown b\leq d$…(2)，$a\frown c\leq d$…(3). よって補題1.7の2)により，(2)から $b\leq(a\supset d)$…(4)，(3)から $c\leq(a\supset d)$…(5)である. すると(4)，(5)および補題1.1の1)のii)より，$(b\smile c)\leq(a\supset d)$…(6)を得る. するとさらに(6)に補題1.7の3)を適用して，$a\frown(b\smile c)\leq d$…(1)を得る. □

注意 相対擬補束は最小元0を含むとは限らない.

注意 $\frown$, $\leq$ を仮に論理の $\wedge$, $\rightarrow$ に各々対応させてみると，補題1.7の1), 2)は，論理の条件法 $\supset$ の基本的な性格(L_G の公理，参照)と対応している. すなわち相対擬補元なる演算は，論理の条件法に対応しているといえよう(論理とブール代数との正確な対

応関係は後述).

定理 1.9 $a \leq b \Leftrightarrow a \supset b = 1$.

証明 1) ⇒について. $a \supset b$ が最大元1であるためには, $x \leq (a \supset b)$ を示せばよい. すなわち補題1.7の2)より, $x \frown a \leq b \Rightarrow x \leq (a \supset b)$ ゆえ, $x \frown a \leq b$ を示せばよい. しかしこれは, $x \frown a \leq a$ および前提 $a \leq b$ より, $x \frown a \leq a \leq b$ となり明らか.

2) ⇐について. 前提と補題1.7の3)より, $x \frown a \leq b$ を得る. x は任意ゆえ, 1としてみる. すなわ $1 \frown a \leq b$ i.e. $a \leq b$. □

注意 定理1.9は論理での正しい推論の条件と対応しているといえる.

定義 相対擬補束 $\mathcal{L}$ が最小元0をもち, しかもその任意の要素 a に対して次の(♯)によって「擬補元」(pseudo-complement) $\neg a$ が定義されているとき, $\mathcal{L}$ を「擬(似)ブール代数」(pseudo-Boolean algebra) あるいは「擬(似)ブール束」(pseudo-Boolean lattice) という.

(♯) $\neg a \underset{\text{df}}{=} a \supset 0$.

注意 上の擬補元の定義だけでは, $\neg\neg a \leq a$ はつねには成立しない. また $\neg$ にこの条件を要求すると $\neg a$ は a^c と同じものとなる. すなわち擬似ブール代数は, 通常の古典論理がブール代数に対応するのに対して, 二重否定の除去を認めない直観主義の論理に対応しているといえる. あるいは, $\neg$ は直観主義の論理での否定に対応しているといえる.

§5.2 イデアルとフィルター

この節では, 論理と最も関係のあるブール代数 $\mathcal{B}$ のイデアルとフィルターについて述べておく. それらはブール代数の構造を明らかにする鍵概念である.

$\mathcal{B}$ の準同型写像

定義 $h: B_1 \to B_2$ なる写像 h が次の1)〜3)を満たすとき, それを $\mathcal{B}_1$ から $\mathcal{B}_2$ への「準同型写像」(homomorphism) といい, 記号 $h: \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ で表わす.

1) $h(a \smile b) = h(a) \smile h(b)$

2) $h(a \frown b) = h(a) \frown h(b)$

3) $h(a^c) = (h(a))^c$

ただし B_1, B_2 は各々ブール代数 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ の $\frown, \smile, {}^c$ が定義されるもとになる

集合を表わす．また 1)～3) における左辺の $\cup, \cap, {}^c$ は $\mathcal{B}_1$ での演算であり，右辺の $\cup, \cap, {}^c$ は $\mathcal{B}_2$ での演算である．

定理 2.1 1) $h(0)=0$. 2) $h(1)=1$.

3) $a \leq b \Rightarrow h(a) \leq h(b)$.

証明 1) $h(0)=h(a\cap a^c)=h(a)\cap h(a^c)=h(a)\cap(h(a))^c=0$.

2) 略．1) と同様に．

3) $a \leq b$ i.e. $a\cap b=a$ とする．すると $h(a)=h(a\cap b)=h(a)\cap h(b)$. i.e. $h(a)\leq h(b)$. □

定義 以下 $h:\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ とする．1) $h``B_1=B_2$ のとき，$h$ を $\mathcal{B}_2$ の「上への写像」(onto-homomorphism) という．ただし，$h``B_1=\{h(x):x\in B_1\}$，すなわち $h``B_1$ は h による B_1 の像を表わす．

2) $h^{-1}``\{0\}$ を $h$ の「核」(kernel) という．ただし $h^{-1}``\{0\}=\{x:h(x)=0\}$ である．すなわち h^{-1} は h の逆写像で，$h^{-1}``\{0\}$ は $\{0\}$ の逆像を表わしている．

3) $h^{-1}``\{1\}$ を $h$ の「膜」(shell) という．ただし $h^{-1}``\{1\}=\{x:h(x)=1\}$ である．

上で定義された核，膜は，定理 2.2，定理 2.3 に登場し大切なので，理解のため簡単な場合での図を添えておこう (図 5.4)．

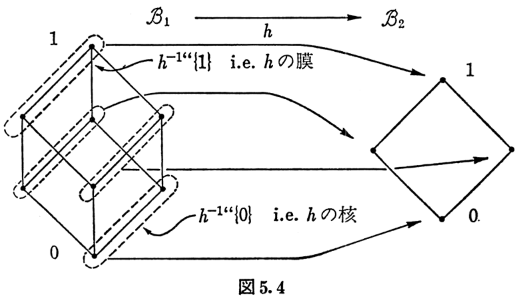


図 5.4

イデアルとフィルター

定義 1) $\mathcal{B}$ の部分集合 Δ (i.e. $\Delta\subseteq\mathcal{B}$) が次の i)～iii) を満たすとき，$\Delta$ を $\mathcal{B}$ の「イデアル」(ideal) という．

i) $0 \in \varDelta$.

ii) $a \in \varDelta,\ b \in \varDelta \Rightarrow a \cup b \in \varDelta$.

iii) $a \in \varDelta,\ b \in \mathcal{B} \Rightarrow a \cap b \in \varDelta$.

2) $\mathcal{B}$ の部分集合 ∇ (i.e. $\nabla \subseteq \mathcal{B}$) が次の i) ～iii) を満たすとき，$\nabla$ を $\mathcal{B}$ の「フィルター」(filter) という．

i) $1 \in \nabla$.

ii) $a \in \nabla,\ b \in \nabla \Rightarrow a \cap b \in \nabla$.

iii) $a \in \nabla,\ b \in \mathcal{B} \Rightarrow a \cup b \in \nabla$.

補題 2.2 1) $\varDelta$ は $\mathcal{B}$ のイデアルである $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ の部分集合 $\varDelta$ が次の条件 i), ii) を満たす．

i) $a \in \varDelta,\ b \in \varDelta \Rightarrow a \cup b \in \varDelta$.

ii) $a \in \varDelta,\ b \leq a \Rightarrow b \in \varDelta$.

2) ∇ は $\mathcal{B}$ のフィルターである $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ の部分集合 ∇ が次の条件を満たす．

i) $a \in \nabla,\ b \in \nabla \Rightarrow a \cap b \in \nabla$.

ii) $a \in \nabla,\ a \leq b \Rightarrow b \in \nabla$.

証明 略． □

注意 補題 2.2 の方をイデアル，フィルターの定義に使う場合もある．

定義 1) イデアルについて．i) {0} を「自明なイデアル」(trivial ideal) という．ii) $\mathcal{B}$ 自身を「非固有イデアル」(improper ideal) という．iii) 最大元 1 を含まないイデアルを「固有イデアル」(proper ideal) という．iv) $\mathcal{B}$ の部分集合 $\{x\colon x \leq a,$ ただし $a \in \mathcal{B}\}$ を，a によって生成された「主-イデアル」(principal ideal) という．

2) フィルターについて．i) {1} を「自明なフィルター」(trivial filter) という．ii) $\mathcal{B}$ 自身を「非固有フィルター」(improper filter) という．iii) 最小元 0 を含まないフィルターを「固有フィルター」(proper filter) という．iv) $\mathcal{B}$ の部分集合 $\{x\colon a \leq x,$ ただし $a \in \mathcal{B}\}$ を，a によって生成された「主-フィルター」(principal filter) という．

問 補題 2.2 を証明せよ．

$\varDelta, \nabla$ と準同型写像との関係

上ではイデアルおよびフィルターの意味内容には全く触れなかった．そこで，論理と関連する意味は後述するとしても，差し当り準同型写像との関係から明らかになる意味内容を，少し理解しておこう．というのは，$h:\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2$ なる h の核と $\mathscr{B}_1$ のイデアルが，また同じ h の膜と $\mathscr{B}_1$ のフィルターが対応するからである．すなわち以下の定理 2.3 と定理 2.4 がこの辺の事情を明らかにする．

定理 2.3　$h:\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2$ とするとき，次の 1), 2) が成立する．

1) h の核 (i.e. h^{-1}“$\{0\}$) は $\mathscr{B}_1$ のイデアルである．

2) h の膜 (i.e. h^{-1}“$\{1\}$) は $\mathscr{B}_1$ のフィルターである．

証明　1) イデアルの定義に現われた3条件を，h^{-1}“$\{0\}$ すなわち $\{x:h(x)=0\}$ が満たすことを示せばよい．i) について．定理 2.1 の 1) により，$h(0)=0$．よって明らかに $0\in\{x:\ h(x)=0\}$．ii) について．まず $a\in h^{-1}$“$\{0\}, b\in h^{-1}$“$\{0\}$ とする．すなわち $h(a)=0, h(b)=0$ とする．するとこのとき，$h(a\cup b)=h(a)\cup h(b)$ ゆえ，$h(a\cup b)=0$ となる．すなわち $a\cup b\in h^{-1}$“$\{0\}$ を得る．iii) について．略．ii) と同様に．

2) 略．1) と同様に．　□

注意　上の証明では，$x\in\{x:Ax\}\Leftrightarrow Ax$ を使っている．念のため．

問　定理 2.3 の 1) の iii) を証明せよ．

定理 2.4　任意のブール代数 $\mathscr{B}$ について，あるブール代数 $\mathscr{B}'$ とその上へのある準同型写像 h (i.e. $h:\mathscr{B}\to\mathscr{B}'$) が存在する．また次の 1), 2) が成立する．

1) $\mathscr{B}$ の任意の固有イデアルは，このようなある h の核である．

2) $\mathscr{B}$ の任意の固有フィルターは，このようなある h の膜である．

注意　この定理はいわば前定理の逆に相当する．またこの定理はブール代数の「準同型定理」(Homomorphism Theorem) と呼ばれることもある．

証明　1) について．大きく [I], [II] に分けて証明する．[I] $\mathscr{B}$ と $\varDelta(\subseteq\mathscr{B})$ が与えられているとして，それらをもとに $\mathscr{B}'$ と h とを以下のようにつくる．そのためにまず，$\mathscr{B}$ の任意の2つの要素 x, y に次のような関係 $\simeq_\varDelta$ を定義する．

$$x\simeq_\varDelta y \underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} x\cap y^c\in\varDelta \text{ かつ } x^c\cap y\in\varDelta.$$

すると $\simeq_\varDelta$ は同値関係となり*，この同値関係によって，$\mathscr{B}$ をいくつかの同値類に分割できる．するとこうした同値類を要素とした新しい集合が考えられ，

これを B' とする．すなわち $B'=\{\{x:x\simeq_{\Delta}y\}:y\in\mathcal{B}\}$，あるいは同値類 $\{x:x\simeq_{\Delta}y\}$ を $|y|$ で表わすと，$B'=\{|y|:y\in\mathcal{B}\}$ である．

ところで $\simeq_{\Delta}$ についてはさらに次の i)～iii) が成立する**．すなわち $x\simeq_{\Delta}y$，$u\simeq_{\Delta}v$ として，i) $x\cup u\simeq_{\Delta}y\cup v$，ii) $x\cap u\simeq_{\Delta}y\cap v$，iii) $x^c\simeq_{\Delta}y^c$．すると，$|y|\cup|v|\underset{\mathrm{df}}{=}|y\cup v|$，$|y|\cap|v|\underset{\mathrm{df}}{=}|y\cap v|$，$|y|^c\underset{\mathrm{df}}{=}|y^c|$ のようにして，B' に $\cup, \cap, {}^c$ が定義できる．つまりいまや B' はブール代数 $\mathcal{B}'$ と考えることができる．なおこのようにして $\mathcal{B}$ と Δ とからつくられる $\mathcal{B}'$ を $\mathcal{B}$ の「商代数」(quotient algebra) といい，記号 $\mathcal{B}/\Delta$ で表わす．

ところで以上のことは，同時に，$\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}'$ との間に次のような $\mathcal{B}$ から $\mathcal{B}'$ の上への準同型写像 h を考えることを許す．すなわち，$h:\mathcal{B}\to\mathcal{B}'$ (i.e. $\mathcal{B}/\Delta$) であり，$h(y)=|y|$ (i.e. $\{x:x\simeq_{\Delta}y\}$) である．

[II] 次に与えられた Δ が，[I]で考えられた h の核であることを示す．すなわち，$y\in\Delta$ なら $y\in h^{-1}``\{0\}$ であることを示す．そのためにまず，$y\in h^{-1}``\{0\}$ が $\{x:x\simeq_{\Delta}y\}=\{x:x\simeq_{\Delta}0\}$ であることに注意する ($y\in h^{-1}``\{0\}$ は $h(y)=0\,(\in\mathcal{B}')$ であり，また $h(y)=|y|=\{x:x\simeq_{\Delta}y\}$ かつ $0\,(\in\mathcal{B}')=|0|=\{x:x\simeq_{\Delta}0\}$ であるゆえ)．すると，

(♯)　$y\in\Delta$ なら $\{x:x\simeq_{\Delta}y\}=\{x:x\simeq_{\Delta}0\}$

を示せばよいことになる．しかしそのために次の (♯♯) が必要になる．

(♯♯)　$y\in\Delta$ なら $y\simeq_{\Delta}0$.

(♯♯) の証明　$y=y\cap 1=y\cap 0^c$ ゆえ，$y\in\Delta$ より，$y\cap 0^c\in\Delta$. …(1)．また $0\in\Delta$，$0=y^c\cap 0$ ゆえ，$y^c\cap 0\in\Delta$…(2)．よって(1)，(2)より，$y\simeq_{\Delta}0$.

さて (♯♯) を使うと，$y\in\Delta$ のとき，$y\simeq_{\Delta}0$ であり，i) $x\simeq_{\Delta}y$ を仮定すると，$\simeq_{\Delta}$ の推移性によって，$x\simeq_{\Delta}0$ を得る．また ii) $x\simeq_{\Delta}0$ を仮定すると，$\simeq_{\Delta}$ の対称性，推移性により，$x\simeq_{\Delta}y$ を得る．よって i), ii) より，$y\in\Delta$ のとき，$x\simeq_{\Delta}y \Leftrightarrow x\simeq_{\Delta}0$ となる．よって，$y\in\Delta$ のとき，$\{x:x\simeq_{\Delta}y\}=\{x:x\simeq_{\Delta}0\}$ となり，これで (♯) が示せた．

2) について．略．1) と同様に． □

注意　i) [I]の＊の部分について．$x\simeq_{\Delta}x$ (反射)，$x\simeq_{\Delta}y$ なら $y\simeq_{\Delta}x$ (対称)，$x\simeq_{\Delta}y$ かつ $y\simeq_{\Delta}z$ なら $x\simeq_{\Delta}z$ (推移) を示せばよい．反射，対称は $\simeq_{\Delta}$ の定義から明らか．推移性も，$x\cap z^c=(x\cap z^c)\cap 1=(x\cap z^c)\cap(y\cup y^c)$ として，これが Δ に属することを示せば

よい．ii) [I]の ** の部分について．念のため i)の部分についてのみ示す．まず$(x\cup u)\cap(y\cup v)^c=(x\cup u)\cap y^c\cap v^c=(x\cap y^c\cap v^c)\cup(u\cap v^c\cap y^c)$…(1)である．ところで定義により $x\simeq_{\Delta}y, u\simeq_{\Delta}v$ から，$x\cap y^c\in\Delta, u\cap v^c\in\Delta$ を得る．よって$(x\cap y^c\cap v^c)\in\Delta$, $(u\cap v^c\cap y^c)\in\Delta$ となり，これらと(1)とから$(x\cup u)\cap(y\cup v)^c\in\Delta$ を得る．一方$(x\cup u)^c\cap(y\cap v)\in\Delta$ も同様に示せる．

§5.3　超フィルター

この節ではまず，前節で導入したイデアルとフィルターの一種である極大イデアルと極大フィルターを定義する．続いてその基本的な性質(2分割性)と存在について述べていく．ただ前節ではイデアルとフィルターの両者をともに扱ったが，この節からははじめの定義を除いて，もっぱら極大フィルターにのみ注目していく．というのは，極大フィルターについていえることは，極大イデアルについてもいえること，および論理との関係からはフィルターの方が都合がよいからである．

超フィルターの2分割性

定義　1) $\mathcal{B}$のある固有イデアル$\tilde{\Delta}$が，$\mathcal{B}$のすべてのイデアルΔについて，$\tilde{\Delta}\subseteq\Delta$ なら $\Delta=\tilde{\Delta}$ であるかまたは $\Delta=\mathcal{B}$ であるとき，この $\tilde{\Delta}$ を $\mathcal{B}$の「極大イデアル」(maximal ideal)という．

2) $\mathcal{B}$のある固有フィルター$\tilde{\nabla}$が，$\mathcal{B}$のすべてのフィルター∇について，$\tilde{\nabla}\subseteq\nabla$ なら $\nabla=\tilde{\nabla}$ であるかまたは $\nabla=\mathcal{B}$ であるとき，この $\tilde{\nabla}$ を「極大フィルター」(maximal filter)あるいは「超フィルター」(ultrafilter)という．

注意　i) 本書では極大イデアル，極大フィルターを表わすときには，Δ,∇ 各々の上に～を付けた記号を使用する．　ii) またたとえば，先に例示した $\{a,b,c\}$ の部分集合を要素とするブール代数の場合でいえば，次の3つが超フィルターである．$\{\{a,b,c\},\{a,b\},\{a,c\},\{a\}\}$，$\{\{a,b,c\},\{a,b\},\{b,c\},\{b\}\}$，$\{\{a,b,c\},\{a,c\},\{b,c\},\{c\}\}$．

さて以上のように定義すると，超フィルターには，$\mathcal{B}$を超フィルターの部分とそれ以外の部分に2分割する，ともいえる大切な性質をもつことが指摘できてくる．

定理 3.1　$\mathcal{B}$の部分集合$\tilde{\nabla}$は超フィルターである $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$の任意の要素 a につ

いて，次の 1), 2) が成立する．

1) $a\in\tilde{V}$ または $a^c\in\tilde{V}$ である，しかし

2) $a\in\tilde{V}$ かつ $a^c\in\tilde{V}$ であるということはない．

証明 [I] 左辺 $\Rightarrow$ 1) について． まずある $a(\in\mathcal{B})$ が存在して $a\notin\tilde{V}$ かつ $a^c\notin\tilde{V}$ と仮定する（背理法）．その上で次のような $V'(\subseteq\mathcal{B})$ を考える，

$$V'=\{x\frown y:\ a\leq x \text{ かつ } y\in\tilde{V}\}.$$

（なおこの V' は，$\tilde{V}$ と $\{a\}$ から生成されたフィルターと呼ばれることがある．）

すると V' について，次の i), ii), iii) がいえる． i) V' はフィルターである．これは V' がフィルターの定義に現われた 3 つの条件を満たすことを示せば明らかとなる．略． ii) $\tilde{V}\subseteq V'$． i.e. 任意の z について，$z\in\tilde{V}$ なら $z\in V'$ である．なぜなら，$z\in\tilde{V}$ とすると，それと $a\leq 1$（これは明らか）とから，$a\leq 1$ かつ $z\in\tilde{V}$ を得，よって V' の定義から $1\frown z\in V'$ を得，さらに $1\frown z=z$ より $z\in V'$ を得るからである． iii) $\tilde{V}$ に属さず V' に属するような要素が存在する．これは，このような要素として上の背理法の仮定を満たす a が考えられることからいえる．すなわち $a\notin\tilde{V}$ であるが一方で $a\in V'$ が示せる．実際，$a\leq a, 1\in\tilde{V}$ は各々明らかゆえ，$a\leq a$ かつ $1\in\tilde{V}$ を得，よって V' の定義から $a\frown 1\in V'$ を得，よって $a\in V'$ である．

さて以上の i), ii), iii) より V' は $\tilde{V}\subsetneq V'$ なるフィルターであることがいえたが，一方 $\tilde{V}$ は超フィルターでありその極大性を考えると，結局 $V'=\mathcal{B}$ となる．すると $a^c\in\mathcal{B}$ ゆえ，$a^c\in V'\cdots$(1) を得る．

ところで一方，$a^c\in V'$ なら $a^c\in\tilde{V}$ である…(♯)，をここで次のように示すことができる．すなわちまず $a^c\in V'$ とする．すると V' の定義より，ある b_1 と b_2 が存在して，

$$a^c=b_1\frown b_2 \text{ かつ } a\leq b_1 (\text{i.e. } a\frown b_1=a) \text{ かつ } b_2\in\tilde{V} \tag{2}$$

といえる．すると(2)のもとでは，$a\frown b_2=(a\frown b_1)\frown b_2=a\frown(b_1\frown b_2)\leq b_1\frown b_2=a^c$ がいえる．すなわち $a\frown b_2\leq a^c$ であり，これを書きかえると，$a^c=(a\frown b_2)\smile a^c$ である．そこでさらにこの式に分配律を使うと，$a^c=(a\smile a^c)\frown(b_2\smile a^c)=1\frown(b_2\smile a^c)=b_2\smile a^c\cdots$(3)を得る．一方(2)からは，$b_2\in\tilde{V}$ であり，よってフィルターの定義より，$b_2\smile a^c\in\tilde{V}$ を得る．するとこれと(3)より，$a^c\in\tilde{V}$ を得る．

さて(♯)が以上のように示されると，(1)と(♯)より，$a^c\in\tilde{V}$ を得る．しかしこ

れは背理法の仮定 $a^c \notin \tilde{\nabla}$ と明らかに矛盾する.

[II] 左辺 ⇒ 2) について. ある $a(\in\mathcal{B})$ が存在して, $a\in\tilde{\nabla}$ かつ $a^c\in\tilde{\nabla}$ であると仮定する(背理法). するとフィルターの定義により, $a\wedge a^c\in\tilde{\nabla}$. i.e. $0\in\tilde{\nabla}$. しかしこれは $\tilde{\nabla}$ が固有フィルターであることと矛盾する.

[III] 右辺 ⇒ 左辺について. $\tilde{\nabla}$ が超フィルターでないと仮定する(背理法). すなわち $\tilde{\nabla}\subsetneq\nabla$ なるある固有フィルター ∇ が存在すると仮定する. するとある $b(\in\mathcal{B})$ が存在して, $b\notin\tilde{\nabla}$…(1) かつ $b\in\nabla$…(2) である. すると前提(右辺)と(1)より, $b^c\in\tilde{\nabla}$ となる. ところで $\tilde{\nabla}$ は ∇ の部分集合とされているゆえ, $b^c\in\tilde{\nabla}$ なら $b^c\in\nabla$ であり, $b^c\in\nabla$…(3) を得る. すると(2)と(3)とフィルターの定義より $b\wedge b^c\in\nabla$, i.e. $0\in\nabla$ となり, これは ∇ が固有フィルターと仮定したことと矛盾する. □

問　定理 3.1 の証明中に現われた ∇' がフィルターであることを示せ.

ところで以上の超フィルターの 2 分割性の定理は, さらに前節で登場した準同型定理などと組み合されて, 後に(§5.4)使用することになる次のような系を成立させる.

系 3.2　$\tilde{\nabla}$ は $\mathcal{B}$ の超フィルターである ⇔ 商代数 $\mathcal{B}/\tilde{\nabla}$ はブール代数 **2** とみなせる (i.e. $\mathcal{B}/\tilde{\nabla}\cong\mathbf{2}$).

ただしブール代数 **2** とは, 1 と 0 のみを要素とする最も簡単なブール代数のことである.

証明　1) ⇒について. $|x|$ を $h:\mathcal{B}\to\mathcal{B}/\tilde{\nabla}$ による x の像とし (i.e. $h(x)=|x|$), 任意の $|x|$ について, $|x|=1$ または $|x|=0$ をいえばよい.

そこでいま $|x|\neq1$…(1) と仮定してみる. ところで一方, 前節の定理 2.3 と定理 2.4 とにより, $\nabla=h^{-1}$“$\{1\}$ ゆえ, $|x|=1\Leftrightarrow x\in\nabla$…(♯) が成立している. よって(1)と(♯)より, $x\notin\nabla$…(2) を得る. すると(2)から, 前提(⇒の左側)と上の定理 3.1 を使って, $x^c\in\nabla$ を得る. これに再び(♯)を適用すると, $|x^c|=1$…(3) を得る.

さてここで h は準同型写像ゆえ, $|x^c|=|x|^c$ であり, (3)から $|x|^c=1$ がいえる. よって結局 $|x|=|x|^{cc}=1^c=0$ を得る. すなわち以上により, $|x|\neq1$ なら $|x|=0$ がいえた. つまり $|x|=1$ または $|x|=0$ がいえた.

2) ⇐について. $\tilde{\nabla}$ が定理 3.1 の条件を満たすことを示す. まず i) $x\in\tilde{\nabla}$ または $x^c\in\tilde{\nabla}$ であることを示す. そのために, $x\notin\tilde{\nabla}$ と仮定する. すると(♯)により, $|x|\neq1$. よって前提(⇒の右側)により, $|x|=0$ さらに $|x|^c=1$…(4) がいえる.

するとhが準同型ゆえ，$|x|^c=|x^c|$ であり，(4)より $|x^c|=1$ を得る．そこでここに再び(♯)を適用すると，$x^c\in\tilde{\nabla}$ を得る．すなわち $x\notin\tilde{\nabla}$ なら $x^c\in\tilde{\nabla}$ がいえた．つまり $x\in\tilde{\nabla}$ または $x^c\in\tilde{\nabla}$ が示せた．次に ii) $x\in\tilde{\nabla}$ かつ $x^c\in\tilde{\nabla}$ ということはない，を示せばよい．これも同様に示せる．略． □

注意 i) 系3.2の ⇔ の右側は，正確には，$\mathcal{B}/\tilde{\nabla}$ と **2** とが同型 ≅ である，ということを述べている(また $\mathcal{B}/\tilde{\nabla}$ と **2** とが同型であるとは，両者の間に $h:\mathcal{B}/\tilde{\nabla}\to\mathbf{2}$ なる準同型写像が存在し，しかもそれが **2** の上への写像であるとともに，1対1である写像となっていることである)．

ii) なおこの辺の事情を理解する助けとして，図を1つ添えておこう(図5.5)．

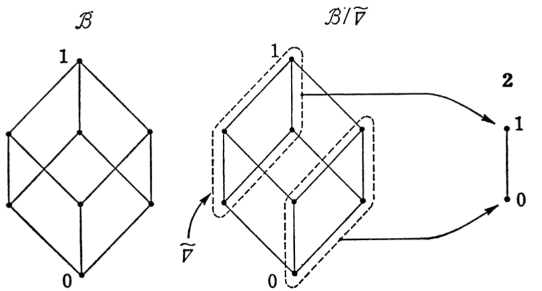


図5.5

超フィルターの存在定理

ところで上の定理に見られた大切な性質をもつ超フィルターは，任意のブール代数に存在するであろうか．下の定理3.3に示されるように答は肯定的である．しかし任意の無限ブール代数におけるその存在は，集合論の公理の1つである選択公理と同値な「ツォルンの補題」(Zorn's lemma)によって保証される．そこで準備として，このツォルンの補題を予め提示しておくことにしよう．

定義 半順序集合 $\mathcal{O}$ の線形部分集合がつねに上界をもつとき，$\mathcal{O}$ は「帰納的に」(inductively)順序づけられている，という．

ツォルンの補題 半順序集合 $\mathcal{O}$ が帰納的に順序づけられているとき，$\mathcal{O}$ には必ず極大元が存在する．

注意 選択公理から導き出されるので補題と呼ばれる．しかしここでは，この補題自

体を仮に公理と考えていくことにし，その証明は与えないでおく．

定理 3.3（超フィルターの存在定理）　任意のブール代数 $\mathcal{B}$ について，$\mathcal{B}$ の任意の固有フィルターには，それを含むような超フィルターが存在する．

証明　まず $\mathcal{B}$ の固有フィルターを ∇_0 とし，それを含む $\mathcal{B}$ のフィルターを要素とする集合 F を考える．すなわち $F=\{\nabla_i : i \in I$ で $\nabla_0 \subseteq \nabla_i\}$（$I$ は添字集合）を考える．すると明らかに F は $\subseteq$ を半順序とする半順序集合となっている．次にこの F の線形部分集合である D を考える．そしてこの D が上界をもつことを示す．しかしそのためには，$\cup D$ を考えればよい（なお，$\cup D$ は D の和集合を表わし，たとえば $D=\{\nabla_1,\nabla_2,\nabla_3\}$ のとき $\cup D=\nabla_1 \cup \nabla_2 \cup \nabla_3$ であり，一般には $x \in \cup D \equiv \exists\nabla\,(x \in \nabla$ かつ $\nabla \in D)$ である）．

そこで $\cup D$ が D の上界であることを次に示そう．まず $\nabla_k \in D$ なら $\nabla_k \subseteq \cup D$ であることは $\cup D$ の定義から明らかである．よってあとは $\cup D$ がフィルターであること，すなわち $\cup D$ がフィルターの3つの条件を満たすことを示せばよい．　i) $x \in \cup D$, $y \in \cup D$ なら $x \frown y \in \cup D$, を示す．まず $x \in \cup D$ から，ある $\nabla_j\,(\in D)$ が存在して，$x \in \nabla_j \cdots(1)$ がいえる．同様に，$y \in \cup D$ から，ある $\nabla_k\,(\in D)$ が存在して，$y \in \nabla_k \cdots(2)$ がいえる．ところで D は線形部分集合ゆえ，∇_j, ∇_k は比較可能であり，$\nabla_j \subseteq \nabla_k$ または $\nabla_k \subseteq \nabla_j$ である．いま $\nabla_j \subseteq \nabla_k$ としてみる．するとこれと(1)より，$x \in \nabla_k \cdots(3)$ を得る．よって(2)，(3)より ∇_k はフィルターゆえ，$x \frown y \in \nabla_k \cdots(4)$ を得る．一方，上に注意したように $\nabla_k \subseteq \cup D$ であり，これと(4)より，$x \frown y \in \cup D$ となる．　ii) $1 \in \cup D$,　iii) $x \in \cup D$, $y \in \mathcal{B}$ なら $x \smile y \in \cup D$, については略．

さて以上より F は帰納的に順序づけられていることが分かった．するとツォルンの補題により，F には極大元が存在する．すなわち $\mathcal{B}$ には ∇_0 を含む極大（i.e. 超）フィルターが存在する．　□

超フィルターの存在定理の系

超フィルターの存在定理は，後に論理の完全性定理と関係してくる．そこでそのときのために，上の定理の系といえる使いやすいかたちにしたものを記しておこう．しかしそのためには，その前に有限交差性という概念（これは論理の無矛盾性と対応するが）の定義，およびそれと固有フィルターとの関係につ

いて述べておく必要がある．なお以下より本節末までは A を $\mathcal{B}$ の任意の部分集合とする．

定義 A の任意の有限部分集合 X について，$\inf X \neq 0$ のとき，A は「有限交差性」(finite intersection property)をもつ，という．なお以下では有限交差性を fip と略記する．

また A からつくられる集合 A^+, A^- を各々次のように定義する．

定義 1) $A^+ \underset{\mathrm{df}}{=} \{x\colon$ A のある要素 a が存在して，$a \leq x\}$.

2) $A^- \underset{\mathrm{df}}{=} \{\inf X\colon$ X は A の有限部分集合である$\}$.

補題 3.4 $A \subseteq A^- \subseteq (A^-)^+$.

証明 1) $A \subseteq A^-$ について．$x \in A$ とする．すると $\{x\}$ は A の有限部分集合であり，しかも $x = \inf\{x\}$ である．よって $x \in A^-$.

2) $A^- \subseteq (A^-)^+$ について．一般に $A \subseteq A^+$ が，A の要素にはそれより小さい A の要素としてそれ自身が考えられることから，成立する．よってその点に注意すれば明らか． □

定理 3.5 1) $(A^-)^+$ は $\mathcal{B}$ のフィルターである．

2) $A \subseteq \nabla \Rightarrow (A^-)^+ \subseteq \nabla$.

3) A は fip をもつ $\Leftrightarrow$ $(A^-)^+$ は固有フィルターである．

注意 i) $(A^-)^+$ は「A から生成されるフィルター」と呼ばれる． ii) 2) と補題 3.4 を合せると，$(A^-)^+$ は A を含むフィルターの中で最小のものであるといえる．

証明 1) について．$(A^-)^+$ がフィルターの 3 つの条件を満たすことを示せばよい．

i) $x \in (A^-)^+, y \in (A^-)^+$ なら $x \frown y \in (A^-)^+$ を示す．まず A^+, A^- の定義より一般に，$x \in (A^-)^+$ であることが，A のある有限部分集合 X が存在して，$\inf X \leq x$ であることといえる点に注意する．また以下では，X が A の有限部分集合であることを，$X \in \mathcal{P}_\omega(A)$ で表わすことにする．さてすると前提 $x \in (A^-)^+, y \in (A^-)^+$ の各々から，ある $X (\in \mathcal{P}_\omega(A))$ が存在して，$\inf X \leq x$，およびある $Y (\in \mathcal{P}_\omega(A))$ が存在して，$\inf Y \leq y$，がいえる．するとさらに $\frown$ の性質を使って $\inf X \frown \inf Y \leq x \frown y \cdots (1)$ を得る．ところでまた一般に，$\inf(X \cup Y) = \inf X \frown \inf Y \cdots (2)$ がいえる．ただし左辺の $\cup$ は合併集合の記号である．さらにまた明らかに，$X \in \mathcal{P}_\omega(A)$, $Y \in \mathcal{P}_\omega(A)$ なら $X \cup Y \in \mathcal{P}_\omega(A) \cdots (3)$ もいえる．するといまや

(1), (2), (3)より，ある$X\cup Y(\in\mathcal{P}_\omega(A))$が存在して，$\inf(X\cup Y)\leq x\wedge y$, を得る．よって上の注意により$x\wedge y\in(A^-)^+$を得る．

ii) $1\in(A^-)^+$, iii) $x\in(A^-)^+$, $y\in B$なら$x\vee y\in(A^-)^+$, についても同様に．略．

2)について．$x\in(A^-)^+$とする．すると上の1)で触れた注意によって，ある$X(\in\mathcal{P}_\omega(A))$が存在して，$\inf X\leq x$…(1)．ところで前提(⇒の左辺)$A\subseteq\nabla$および$X\subseteq A$より$X\subseteq\nabla$であり，しかも$\nabla$がフィルターであることから，$\inf X\in\nabla$…(2)を得る．よって(1), (2)および§5.2の補題2.2により，$x\in\nabla$を得る．すなわち前提のもとで$x\in(A^-)^+$なら$x\in\nabla$であり，$(A^-)^+\subseteq\nabla$が示された．

3)について．i) 左辺⇒右辺を示す．まず$(A^-)^+$は固有ではないと仮定する．i.e. $0\in(A^-)^+$と仮定する．すると上の1)で触れた注意により，ある$X(\in\mathcal{P}_\omega(A))$が存在して，$\inf X\leq 0$となる．ところで0は最小元ゆえ，結局$\inf X=0$となる．すなわち，ある$A$の有限集合が存在して，$\inf X=0$ということであり，fipの定義より，このことは$A$がfipをもっていない，ことでもある．すると前提(左辺)と矛盾する．

ii) 右辺⇒左辺を示す．Aがfipをもたないと仮定する．すなわち，ある$X(\in\mathcal{P}_\omega(A))$が存在して，$\inf X=0$．するとここから，ある$X(\in\mathcal{P}_\omega(A))$が存在して，$\inf X\leq 0$がいえる．すなわち$0\in(A^-)^+$がいえる．しかしこれは$(A^-)^+$が固有である(前提)ことと矛盾する．　□

さて以上で準備が終ったので，次に超フィルターの存在定理3.3の系を2つほど記しておく．

系 3.6　$\mathcal{B}$のfipをもつ任意の部分集合Aには，それを含むような超フィルターが存在する．

証明　上の定理3.5と補題3.4から，Aを含む固有フィルター$(A^-)^+$が考えられる．すると超フィルターの存在定理3.3により，さらにそれを含む超フィルターが存在する．　□

系 3.7　$\mathcal{B}$の0でない要素xからなる集合$\{x\}$には，それを含むような超フィルターが存在する．

証明　$x\neq 0$より，$\{x\}$はfipをもつ．よって上の系3.6より，明らか．　□

§5.4 ブール代数と論理—その1—

命題論理では命題間の推論関係がその中心テーマであった．ところでこの推論関係は，命題の集合上での一種の順序関係とみなすことができる．とくに以下に見るように，命題の集合を論理的な同値関係で類別して得られる集合での推論関係は，まさに半順序関係といえ，しかもその集合はブール代数であることが示せるのである．したがってそこには，前節までに述べてきたブール代数についての一般的な議論も適用でき，命題論理を以前とは異なった視点から，見直すことが可能になる．

リンデンバウム代数 $\mathscr{L}_1$

まず以下では，命題論理が扱う命題の集合を，というより命題論理の論理式$(A, B, \cdots)$の集合を$\mathscr{F}$で表わすことにする．そしてこの$\mathscr{F}$上に次のように関係$\lesssim$を定義する．

定義 $A \lesssim B \underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} A \vdash B$(i.e. $\vdash A \supset B$).

するとこの関係$\lesssim$には，1) $A \lesssim A$(反射性)，2) $A \lesssim B, B \lesssim C \Rightarrow A \lesssim C$(推移性)が成立することは明らかであろう．しかし$A \lesssim B, B \lesssim A \Rightarrow A = B$(反対称性)は成立しない．$A \lesssim B, B \lesssim A$のとき，定義より$\vdash A \equiv B$はいえるが，$\vdash A \equiv B$は$A = B$ではないからである．つまり$\lesssim$は半順序関係とはいえない．なおこの$\lesssim$のように，反射性，推移性のみを満たす関係は，一般に「擬順序」(pseudo-order)と呼ばれる．そこで$\mathscr{F}$上に新たに次のような同値関係$\simeq$を定義する．

定義 $A \simeq B \underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} A \vdash B$ かつ $B \vdash A$(i.e. $\vdash A \supset B$ かつ $\vdash B \supset A$).

そしてこの$\simeq$によって$\mathscr{F}$を類別し，その結果得られる同値類を要素とする新たな集合$\mathscr{F}/\simeq$を考える．と同時にこの$\mathscr{F}/\simeq$上に改めて関係$\leq$を新たに定義する．

定義 $\mathscr{F}/\simeq \underset{\mathrm{df}}{=} \{|A| : A \in \mathscr{F}\}$ ただし$|A| = \{X : X \simeq A\}$.

なおこの集合$\mathscr{F}/\simeq$は$\mathscr{F}$の「商集合」(quotient set)と呼ばれる．

定義 $|A| \leq |B| \underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} A \vdash B$(i.e. $\vdash A \supset B$).

するとこの$\leq$は半順序となり，$\leq$の定義された集合$\mathscr{F}/\simeq$はブール代数と

なることがいえてくる.

定理 4.1　1) 関係 $\leq$ は半順序である.

2) i) $|A|=1 \Leftrightarrow \vdash A$.　　ii) $|A|=0 \Leftrightarrow \vdash \neg A$.

3) $\leq$ の定義された集合 $\mathscr{F}/\simeq$ (i.e. $\langle \mathscr{F}/\simeq, \leq \rangle$) はブール代数である.

証明　1)について. i) $\vdash A \supset A$ より $|A| \leq |A|$ (反射性)は明らか. ii) $|A| \leq |B|, |B| \leq |A|$ と仮定. i.e. $\vdash A \supset B, \vdash B \supset A$ と仮定. すると $\simeq$ の定義より $A \simeq B$. すなわち A と B は同じ同値類に属する. よって $|A|=|B|$. つまり反対称性も成立する. iii) $|A| \leq |B|, |B| \leq |C|$ と仮定. i.e. $\vdash A \supset B, \vdash B \supset C$ と仮定. すると, 一方 $\vdash (B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ を示せるゆえ, MP を 2 回使って $\vdash A \supset C$ を得る. よって $|A| \leq |C|$. つまり推移性も成立する.

2)の i)について. まず左辺⇒右辺を示す. そのために左辺 $|A|=1$ と仮定. すると 1 は最大元ゆえ, 任意の B について, $|B| \leq |A|$. すなわち任意の B について, $\vdash B \supset A$. ここで B は任意ゆえ, $\vdash B$ となる B を考えてもよい. すると MP により, $\vdash A$ を得る. 次に右辺⇒左辺を示す. 右辺 $\vdash A$ と仮定. すると一方で, $\vdash A \supset (B \supset A)$ (L_1 の公理)ゆえ, $\vdash B \supset A$ を得る. よって $\leq$ の定義により $|B| \leq |A|$. またこの B は任意の式でよいゆえ, $|A|$ は最大元 1 といえる. i.e. $|A|=1$.

2)の ii)について. 略. i)と同様に.

3)について. ブール代数は相補分配束であり, しかもすでに 1)より $\mathscr{F}/\simeq$ は半順序集合であることから, あとは i)その任意の 2 要素 $|A|, |B|$ からなる $\{|A|, |B|\}$ がつねに上限, 下限をもつこと, ii)分配律を満たすこと, iii)相補律を満たすことを示せばよい.

i)について. まず $\vdash A \supset (A \vee B)$, $\vdash B \supset (A \vee B)$ …(1) および $\vdash (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$ …(2)が成立することに注意する. よって(1)より, $|A| \leq |A \vee B|, |B| \leq |A \vee B|$ …(3)がいえる. また(2)より, $\vdash A \supset C, \vdash B \supset C$ なら $\vdash (A \vee B) \supset C$ がいえ, よって $|A| \leq |C|, |B| \leq |C|$ なら $|A \vee B| \leq |C|$ …(4) がいえる. すると, (3), (4) により, $\{|A|, |B|\}$ には $|A \vee B|$ なる上限がつねに存在するといえる(すなわち, $|A| \cup |B| \underset{\mathrm{df}}{=} |A \vee B|$ とできる). さらに同様にして下限の存在も示せる ($|A| \cap |B| \underset{\mathrm{df}}{=} |A \wedge B|$ とできる).

ii)について. $\vdash (A \wedge (B \vee C)) \supset ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ は成立する. よって $|A$

$\wedge(B\vee C)|\leq|(A\wedge B)\vee(A\wedge C)|$. これに上の i) での $\cap, \cup$ の定義を使うと，

$$|A|\cap(|B|\cup|C|)\leq(|A|\cap|B|)\cup(|A|\cap|C|)$$

となり，分配律が成立する(逆は i) によって $\mathscr{F}/\simeq$ が束であることから明らか).

iii) について. $\vdash A\vee\neg A$ は成立する. するとこの定理の 2) の i) より，$|A\vee\neg A|=1$. よって$\cup$の定義より，$|A|\cup|\neg A|=1\cdots(1)$. また $\vdash\neg(A\wedge\neg A)$ が成立することから，この定理の 2) の ii) により，$|A\wedge\neg A|=0$, よって $|A|\cap|\neg A|=0\cdots(2)$を得る. (1), (2)は相補律にほかならず，$|\neg A|$ は $|A|$ の補元といえる(すなわち $|A|^c \underset{\mathrm{df}}{=} |\neg A|$ とできる). □

問 定理 4.1 の 2) の ii) を証明せよ.

定義 上の定理 4.1 の 3) によってブール代数であることが判明した集合 $\langle\mathscr{F}/\simeq, \leq\rangle$を，すなわちブール代数$\langle\mathscr{F}/\simeq, \leq\rangle$を，「リンデンバウム代数」(Lindenbaum algebra) と呼び，以下 $\mathscr{L}_1$ で表わすことにする.

注意 以上のブール代数と論理の対応，および§5.1 で触れた相対擬補元や擬補元に注意するとき，論理の公理系 L_G の公理 I, II に現われる諸式の意味はいまや明らかであろう. また公理 III については，次節の議論によって明らかになるであろう.

解釈 f と超フィルター

さて以上により，命題論理とブール代数との間に対応のあることは明らかになった. そこでこの対応をふまえるとき，命題論理の諸問題はブール代数の立場から処理できてくる. いまその1つとして命題論理の完全性を考えてみよう. しかしそのためには，命題論理 L_1 への解釈 f と $\mathscr{L}_1$ の超フィルターとの関係がその論点となることから，まずはその関係を見ていくことが必要となる.

定義 命題論理の論理式 A, B にブール代数 **2** の要素を，次の 1), 2) によって定義される仕方で対応させる写像 f(i.e. $f:\mathscr{F}\to\mathbf{2}$)を，命題論理 L_1 への「解釈 f」という. ただし **2** は2つの要素 1, 0 のみからなるブール代数を表わす.

1) $f(P_i) \underset{\mathrm{df}}{=} h(|P_i|)$. ただし P_i は命題論理の要素式であり，h は $h:\mathscr{L}_1\to\mathbf{2}$ なる準同型写像である.

2) i) $f(A\wedge B) \underset{\mathrm{df}}{=} f(A)\cap f(B)$.　ii) $f(\neg A) \underset{\mathrm{df}}{=} f(A)^c$. ただし右辺の$\cap$, ^{c} はブール代数 **2** での演算を表わす.

補題 4.2 f を上で定義された命題論理 L_1 への解釈とすると，$f(A)=h(|A|)$

となる．なおこのようにhをもとに考えられるfは，hによって「引き起された」(induced)解釈と呼ばれる．

証明　1)　Aが要素式のとき．定義より明らか．

2)　$A:B\wedge C$のとき．$f(B\wedge C)=f(B)\cap f(C)$　（fの定義より）

$=h(|B|)\cap h(|C|)$　（帰納法の仮定により）

$=h(|B|\cap|C|)$　（hが準同型写像ゆえ）

$=h(|B\wedge C|)$　（$\mathscr{L}_1$での$\cap$の定義より）．

3)　$A:\neg B$のとき．同様にして，$f(\neg B)=f(B)^c=h(|B|)^c=h(|B|^c)$

$=h(|\neg B|)$．　□

定理 4.3　$\mathscr{L}_1$の超フィルター$\tilde{\nabla}$は，命題論理L_1への解釈fを与える．

証明　まず§5.2の定理2.4(i.e. 準同型定理)により，$\mathscr{L}_1$のフィルター∇は，$h:\mathscr{L}_1\to\mathscr{L}_1/\nabla$なる$h$を与えることに注意する．そしていまこのフィルター$\nabla$が超フィルター$\tilde{\nabla}$の場合には，§5.3の系3.2により，$\mathscr{L}_1/\tilde{\nabla}\cong\mathbf{2}$であることから，この$h$は，$h:\mathscr{L}_1\to\mathbf{2}$なる準同型写像である．すると，上の補題4.2により，このhをもとに，命題論理L_1への解釈fを引き起すことができる．つまり$\mathscr{L}_1$の超フィルター$\tilde{\nabla}$は，解釈fを与えるといえる．　□

注意　実はこの定理の逆ともいえる，$\{|A|:f(A)=1\}$は$\mathscr{L}_1$の超フィルターである，も成立する．よって上の定理と合せるとき，$\mathscr{L}_1$の超フィルターと命題論理への解釈との間にきれいな対応関係があることが分かるのである．

L_1の完全性定理

以上の準備のもとに，命題論理の完全性定理の証明を，ブール代数を使って与えてみよう．

定理 4.4　$\vDash A \Rightarrow \vdash A$.

証明　(対偶を示す.)$\vdash A$でないと仮定する．すると定理4.1の2)により，$\mathscr{L}_1$では$|A|\neq 1$ i.e. $|\neg A|\neq 0$である．すると超フィルターの存在定理の系3.7により，$|\neg A|$を含む超フィルター$\tilde{\nabla}$が存在する．そしてこの$\tilde{\nabla}$を使うと，定理4.3により，$h:\mathscr{L}_1\to\mathscr{L}_1/\tilde{\nabla}\,(\cong\mathbf{2})$が考えられ，さらにこの$h$をもとに，それによって引き起される解釈$f$が存在する．

ところで$|\neg A|\in\tilde{\nabla}$ゆえ，$h(|\neg A|)=1$．よって$h(|A|)^c=1$．すなわち$h(|A|)=0$．

よって $f(A)=0$ となる．すなわち A を0とする解釈 f が存在するわけで，A はトートロジーではない．　□

また命題論理でのヘンキンの定理ともいえる次の定理も，ブール代数を介して証明しておこう．

定理 4.5　命題論理の論理式からなる集合 K(i. e. $K\subseteq\mathscr{F}$) が無矛盾であるなら，K に属する論理式を同時に1とする解釈が存在する．

証明　まず K が無矛盾であるとする．すなわち，K の任意有限個の論理式 $A_1,\cdots,A_n$ に対して，$\vdash\neg(A_1\wedge\cdots\wedge A_n)$ であることはない(§4.3 p.117参照)．すると定理4.1の2)により，任意有限個の $A_1,\cdots,A_n$ に対して，$|A_1\wedge\cdots\wedge A_n|\neq 0$．よって $\mathscr{L}_1$ での $\cap$ の定義から，任意有限個の $|A_1|,\cdots,|A_n|$ に対して，$|A_1|\cap\cdots\cap|A_n|\neq 0$ である．するとこれは，$K/\simeq(\subseteq\mathscr{F}/\simeq)$ が fip をもつことを表わしている．

さてすると，超フィルターの存在定理の系3.6により，$K/\simeq$ を含む $\mathscr{L}_1$ の超フィルター $\tilde{V}$ が存在する．よって定理4.3により，この超フィルター $\tilde{V}$ をもとに，$h:\mathscr{L}_1\to\mathscr{L}_1/\tilde{V}(\cong 2)$ が考えられ，さらにこの h をもとに，それによって引き起される解釈 f が存在するといえる．

ところでまた，$|A_i|\in K/\simeq$ とすると，$K/\simeq\subseteq\tilde{V}$ ゆえ，$|A_i|\in\tilde{V}$ であり，さらにフィルターと h の膜との対応から，これは $|A_i|\in h^{-1}``\{1\}$ であり，よって $h(|A_i|)=1$ を得る．そしてさらに $h(|A_i|)=f(A_i)$ に注意するなら，結局，$|A_i|\in K/\simeq$ であるなら $f(A_i)=1$ であることが成立する．すなわち，f は K に属する論理式を同時に1とする解釈である．　□

注意　上の定理の証明からも分かるように，超フィルターの存在定理の系3.6は，§4.4のリンデンバウムの補題に相当しているといえよう．

§5.5　ブール代数と論理—その2—

この節では述語論理とブール代数との関係を見てみよう．しかしそのためには，先に導入したブール代数では十分ではない．すなわち無限個の要素についての結び(上限)と交わり(下限)も定義されているブール代数が，用意されていなければならない．そこでまずそうしたブール代数に簡単に触れ，その上で述

語論理との関係などを述べていくことにする.

無限結びと無限交わり

定義　Sをブール代数$\mathcal{B}$の空でない部分集合(有限でも無限でもよい)とし，このSに上限が存在するとき，それを$\cup S$で表わし，「無限結び」(infinite join)と呼ぶ. またこのSに下限が存在するとき，それを$\cap S$で表わし，「無限交わり」(infinite meet)と呼ぶ.

なおSを$\{b_i : i \in I\}$ (Iは添字集合)と表わすとき，$\cup S, \cap S$の代りに各々$\bigcup_{i \in I} b_i$, $\bigcap_{i \in I} b_i$と表わすこともある.

定義　上記した$S(\subseteq \mathcal{B})$につねに$\cup S, \cap S$が存在するとき，$\mathcal{B}$を「完備ブール代数」(complete Boolean algebra)という.

注意　この節では以下，とくに断わらない限り，ブール代数というとき，この完備ブール代数を意味するものとする.

無限結びと無限交わりについての簡単な定理を1つ添えておく.

定理 5.1　1) i)　すべての$i(\in I)$について，$b_i \leq \bigcup_{i \in I} b_i$.

ii)　すべての$i(\in I)$について，$\bigcap_{i \in I} b_i \leq b_i$.

2) i)　すべての$i(\in I)$について，$b_i \leq c$ なら $\bigcup_{i \in I} b_i \leq c$.

ii)　すべての$i(\in I)$について，$c \leq b_i$ なら $c \leq \bigcap_{i \in I} b_i$.

3) i)　すべての$i(\in I)$について，$b_i \leq c_i$ なら $\bigcup_{i \in I} b_i \leq \bigcup_{i \in I} c_i$.

ii)　すべての$i(\in I)$について，$b_i \leq c_i$ なら $\bigcap_{i \in I} b_i \leq \bigcap_{i \in I} c_i$.

4) i)　$\bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} b_{ij} = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} b_{ij}$.

ii)　$\bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} b_{ij} = \bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} b_{ij}$.

5)　$\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} b_{ij} \leq \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} b_{ij}$.

証明　1), 2)は定義から明らか. 3)は2)を使えばよい. 4)は，2)と3)を使えばよい.

5)について. $c_j = \bigcup_{i \in I} b_{ij}$とおく. すると1)より$b_{ij} \leq \bigcup_{i \in I} b_{ij}$ゆえ，3)のii)を使って，$\bigcap_{j \in J} b_{ij} \leq \bigcap_{j \in J} c_j$を得る. すると2)のi)を使って，$\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} b_{ij} \leq \bigcap_{j \in J} c_j$を得る. □

Q-フィルター

$\mathcal{B}$の超フィルターについても，述語論理の完全性定理の証明などのためには，

従来のものでは十分ではない．新たにQ-フィルターの概念が必要となる．

定義　h を $h:\mathcal{B}\to\mathcal{B}'$ なる準同型写像とする．また各々の $n(<\omega)$ について，S_n を下限 a_n をもつ $\mathcal{B}$ の部分集合とする．すなわち，

(Q)　各々の $n(<\omega)$ について，$a_n=\cap S_n=\cap\{b:b\in S_n\}$ であるとする．

以上のもとで，各々の $n(<\omega)$ について，次式の右辺の $\cap$ が存在し，

$$h(a_n)=\cap\{h(b):b\in S_n\}$$

であるとき，この h を(Q)を保存する準同型写像あるいは簡単に「Q-準同型写像」(Q-homomorphism)という．

注意　実際，単に準同型写像というだけでは，一般に $h(a_n)\leq\cap\{h(b):b\in S_n\}$ は成立しても，その逆，よって＝は必ずしも成立しない．

定義　$\tilde{V}$ が $\mathcal{B}$ のフィルターであり，しかもこの $\tilde{V}$ によってつくられる $h:\mathcal{B}\to\mathcal{B}/\tilde{V}$ なる h が Q-準同型写像であるとき，$\mathcal{B}$ の超フィルター $\tilde{V}$ を「Q-フィルター」という．

ところでこのようなQ-フィルターの存在は，超フィルターの存在定理を使って証明することができる．

定理 5.2　$x\neq 0$ であるなら，$\mathcal{B}$ には $\{x\}$ を含む Q-フィルターが存在する．

証明　1) まず，任意の $n(<\omega)$ について，$b_n\in S_n(\subseteq\mathcal{B})$ であり，しかも $\{x,a_0\cup b_0{}^c,a_1\cup b_1{}^c,\cdots,a_n\cup b_n{}^c\}$ (ただし $a_n=\cap S_n$) が fip をもつことになるような b_n が存在することを，帰納法を使って示す．そこで，$k<n(<\omega)$ では上の条件を満たす b_k が存在すると仮定する．すなわち，$n=0$ のときは $y=x$ とし，$n>0$ のときは $y=x\cap(a_0\cup b_0{}^c)\cap\cdots\cap(a_{n-1}\cup b^c{}_{n-1})$ として，いずれのときも $y\neq 0$ であると仮定する(帰納法の仮定)．その上でさらに，すべての $b(\in S_n)$ について，$y\cap(a_n\cup b^c)=0$ と仮定してみる(背理法)．すると，$y\cap(a_n\cup b^c)=(y\cap a_n)\cup(y\cap b^c)=0$ ゆえ，$y\cap a_n=0\cdots(1)$ かつ $y\cap b^c=0\cdots(2)$ となる．よって(2)より，すべての $b(\in S_n)$ について，$y\leq b$ である*．よって $y\leq a_n(=\cap S_n\in S_n)$．i.e. $y=y\cap a_n$．すると(1)より $y=0$ となり，帰納法の仮定と矛盾する．よって，$y\cap(a_n\cup b^c{}_n)\neq 0$ なる $b_n(\in S_n)$ が存在することが明らかとなった．すなわち任意の $n(<\omega)$ について，$\{x,a_0\cup b_0{}^c,\cdots,a_n\cup b_n{}^c\}$ が fip をもつようになる $b_n(\in S_n)$ が存在することが示された．

2) さて 1) がいえるとさらに，$x\neq 0$ のとき，$\{x,a_0\cup b_0{}^c,\cdots,a_n\cup b_n{}^c,\cdots\}$ が

fip をもつことがいえる．そこでここに超フィルターの存在定理の系 3.6 を適用すると，それを含む超フィルター $\tilde{V}$ が存在することは明らかとなる．

3) そこで次に，この超フィルター $\tilde{V}$ が Q-フィルターであることを示す．すなわちこの $\tilde{V}$ によってつくられる $h:\mathcal{B}\to\mathcal{B}/\tilde{V}$ なる h が，任意の $n(<\omega)$ について，$a_n=\cap S_n=\cap\{b:b\in S_n\}\cdots$(Q)を保存することを示す．i) $a_n\cup b_n{}^c\in\tilde{V}$ ゆえ，$h(a_n)\cup h(b_n)^c=h(a_n\cup b_n{}^c)=1$. i.e. $h(b_n)\leq h(a_n)$**．すると定理 5.1 の 1) ii) により $\cap\{h(b):b\in S_n\}\leq h(b_n)$ であるゆえ，$\cap\{h(b):b\in S_n\}\leq h(a_n)\cdots$(3) を得る．ii) 一方，$a_n=\cap S_n$ ゆえ，任意の $b(\in S_n)$ について，$a_n\leq b$. よって $h(a_n)\leq h(b)$．すると定理 5.1 の 2) ii) により，$h(a_n)\leq\cap\{h(b):b\in S_n\}\cdots$(4) を得る．すると以上の(3)，(4) より，$h(a_n)=\cap\{h(b):b\in S_n\}$ が成立する．すなわち $\tilde{V}$ は Q-フィルターである． □

注意　*，** では各々，$a\cap b^c=0\Leftrightarrow a\leq b$，$a\cup b^c=1\Leftrightarrow b\leq a$ を使っている．

問　上の注意事項を証明せよ．

リンデンバウム代数 $\mathcal{L}_2$

命題論理の論理式の集合をもとにリンデンバウム代数 $\mathcal{L}_1$ を考えたのと同様にして，述語論理の論理式の集合(以下これを $\mathcal{F}$ で表わす)をもとにリンデンバウム代数 $\mathcal{L}_2$ を定義する．

定義　1) $A\simeq B \underset{\text{df}}{\Leftrightarrow} \vdash A\supset B$ かつ $\vdash B\supset A$.

2) $\mathcal{F}/\simeq \underset{\text{df}}{=} \{|A|:A\in\mathcal{F}\}$　　(ただし $|A|=\{X:X\simeq A\}$.)

3) $|A|\leq|B| \underset{\text{df}}{\Leftrightarrow} A\vdash B$ (i.e. $\vdash A\supset B$).

ただし 1)～3) において，$A,B\in\mathcal{F}$ である．

定理 5.3　1) 上記した $\leq$ が定義されている商集合 (i.e. $\langle\mathcal{F}/\simeq,\leq\rangle$) は，ブール代数である．

2) $\langle\mathcal{F}/\simeq,\leq\rangle$ では，$|\forall x_iAx_i|=\cap\{|Ax_i/x_k|:k\in\omega\}\cdots(*)$ である．　ただし Ax_i/x_k は，A 中の束縛変項 x_k を A に現われてこない変項 x_j に置きかえ**，自由変項として現われている x_i のすべてを x_k に置きかえて得られる論理式である．

注意　i) (*) は(Q)に相当する．ii) ** について．この置きかえによって得られる論理式の x_i に対して x_k が自由であることは，明らかであろう．

証明 1）について．$\mathscr{L}_1$ の場合と同様．

2）述語論理では $\vdash \forall x_i A x_i \supset A x_i/x_k \cdots$(1)，$\vdash C \supset A x_i/x_k \Rightarrow \vdash C \supset \forall x_k A x_k \cdots$(2)の各々が任意の k について成立する．また $\vdash \forall x_k A x_k \equiv \forall x_i A x_i \cdots$(3) も成立する．そこで $\leq$ の定義から，(1)より $|\forall x_i A x_i| \leq |A x_i/x_k| \cdots$(4)，また(2)より，$|C| \leq |A x_i/x_k| \Rightarrow |C| \leq |\forall x_k A x_k| \cdots$(5) を得る．さらに(3)より，$|\forall x_k A x_k| = |\forall x_i A x_i| \cdots$(6)も得る．よって(5)，(6)より，$|C| \leq |A x_i/x_k| \Rightarrow |C| \leq |\forall x_i A x_i| \cdots$(7)がいえる．すると(4)，(7)は，$|\forall x_i A x_i|$ が $\{|A x_i/x_k| : k \in \omega\}$ の下限であることを表わしている．すなわち $|\forall x_i A x_i| = \bigcap \{|A x_i/x_k| : k \in \omega\}$ である． □

完全性定理

以上により，述語論理とブール代数との対応も一応は明らかになった．そこで最後に述語論理の完全性定理を，ブール代数の立場から改めて証明してみよう．

補題 5.4 $\tilde{V}$ が $\mathscr{L}_2$ の Q-フィルターであるとき，

すべての $k(\in \omega)$ について，$|A x_i/x_k| \in \tilde{V} \Leftrightarrow |\forall x_i A x_i| \in \tilde{V}$.

証明 1）⇒について．$\tilde{V}$ は Q-フィルターゆえ，$h: \mathscr{L}_2 \to \mathscr{L}_2/\tilde{V}\ (\cong \mathbf{2})$ なる h が考えられ，すべての $k(\in \omega)$ について，$|A x_i/x_k| \in \tilde{V}$ とすると，すべての $k(\in \omega)$ について，$h(|A x_i/x_k|) = 1$ となる．すると $\bigcap \{h(|A x_i/x_k|) : k \in \omega\} = 1 \cdots$(1) を得る．ここで h は Q-準同型写像ゆえ，$h(\bigcap \{|A x_i/x_k| : k \in \omega\}) = \bigcap \{h(|A x_i/x_k|) : k \in \omega\} \cdots$(2)．一方上の定理 5.3 の 2）により，$h(|\forall x_i A x_i|) = h(\bigcap \{|A x_i/x_k| : k \in \omega\}) \cdots$(3)がいえる．よって(1)，(2)，(3)より，$h(|\forall x_i A x_i|) = 1$．すなわち $|\forall x_i A x_i| \in \tilde{V}$ を得る．

2）⇐について． 同様に．略． □

問 上の 2)⇐について，を証明せよ．

定理 5.5 $\models C \Rightarrow \vdash C$.

証明 （C: 閉じた式とする．それで十分なことは§4.3 p.116 参照．）1）まず $\vdash C$ でないと仮定する．すると $|\neg C| \neq 0$．よって定理 5.3 により，$\{|\neg C|\}$ を含む $\tilde{V}$ なる $\mathscr{L}_2$ の Q-フィルターが存在する．そこでこの $\tilde{V}$ を使って次のような解釈 $\mathrm{I} = \langle \mathrm{D}, \mathrm{R}, \mathrm{s} \rangle = \langle \mathrm{M}, \mathrm{s} \rangle$ を考える．すなわち D: 変項の集合，$\mathrm{R}[P_i^n] = P_i^n$ (i.e. それ自身に対応させる)，$\mathrm{s} = \langle x_1, x_2, \cdots \rangle$ とし，さらに $\mathrm{M}, \mathrm{s} \models P_i^n x_{i_1} \cdots x_{i_n}$

$\Leftrightarrow |P_i{}^n \mathrm{s}^\star[x_{i_1}]\cdots \mathrm{s}^\star[x_{i_n}]| \in \tilde{V}$ とする．

2) すると以下の i)～iii) により，一般にも $\mathrm{M,s} \models A \Leftrightarrow |\mathrm{s}A| \in \tilde{V}$…(1) が成立する(ただし s$A$ は A の自由変項 x_l を $\mathrm{s}^\star[x_l]$ に置きかえた式とする)． i) A: 要素式のとき．上の解釈の与え方から明らか． ii) A:$\neg B$, $B \wedge C$ などのとき．略． iii) A:$\forall x_i B x_i$ のとき．$\mathrm{M,s} \models \forall x_i B x_i$

$\Leftrightarrow$ すべての $x_k(\in \mathrm{D})$ について，$\mathrm{M,s}(i/x_k) \models Bx_i$

$\Leftrightarrow$ すべての $k(\in \omega)$ について，$\mathrm{M,s}(i/x_k) \models Bx_i$

$\Leftrightarrow$ すべての $k(\in \omega)$ について，$|\mathrm{s}(i/x_k)Bx_i| \in \tilde{V}$　　(帰納法の仮定により)

$\Leftrightarrow$ すべての $k(\in \omega)$ について，$|\mathrm{s}Bx_i/x_k| \in \tilde{V}$

$\Leftrightarrow |\forall x_i \mathrm{s} B x_i| \in \tilde{V}$　　(補題 5.4 により)

$\Leftrightarrow |\mathrm{s}\forall x_i B x_i| \in \tilde{V}$.

3) さらに A が閉じた式のときは，すべての s について，sA と A とは同じ式ゆえ，$\mathrm{M} \models A$

$\Leftrightarrow$ すべての s について，$\mathrm{M,s} \models A$

$\Leftrightarrow$ すべての s について，$|\mathrm{s}A| \in \tilde{V}$　　((1)による)

$\Leftrightarrow |A| \in \tilde{V}$…(2) となる．

4) さていま $|\neg C| \in \tilde{V}$ ゆえ，(2)を使うと $\mathrm{M} \models \neg C$. すなわち C が 0 となる解釈が存在する．i.e. $\models C$ ではない．　□

注意　ところで上の定理の系として，K を有限個の閉じた式の集合とするとき，「K が無矛盾なら K は可算モデルをもつ」…(*)を示すことはできる．しかし K が無限個の式からなる集合の場合の同命題，すなわちヘンキンの定理は，いままで述べてきたブール代数の知識だけでは証明できない．それはさらに「超積」(ultraproduct)などの道具立てを導入し，コンパクト定理を示した上で，上の(*)と合せて証明されてくる．

付録：不完全性定理とその証明の構想

どの分野の知識群もたいていは自然数についての知識を前提にしている．したがってその公理系は，自然数の公理系をその一部として含んでいる．しかしこの自然数の公理系(以下では§3.3のNを考える)には，もはや§4.4 p.121の意味でも，意味論的な意味でも完全性は成立しないことが，すでに証明されている．いわゆるゲーデルの(第1)不完全性定理である．そこで以下では，この有名な定理とその証明の大筋をごく簡単に述べておく．

不完全性定理　まず定理を掲げることから始めよう．ただその前に1つ定義が必要となる．

定義　すべての自然数$n(\in\omega)$について$\vdash_N An$なら，$\vdash_N\exists x\neg Ax$は成立しないとき，Nは「ω-無矛盾」である，という．

注意　定義をいいかえると，「すべての$n(\in\omega)$について$\vdash_N An$であり，かつ$\vdash_N\exists x\neg Ax$である，ということはない」となり，$\vdash_N\forall xAx$(i.e. $\vdash_N\neg\exists x\neg Ax$)を「すべての$n(\in\omega)$について$\vdash_N An$である」とみなした上での無矛盾性といえよう．なお，ω-無矛盾であるなら，無矛盾である，といえる．

定理(不完全性定理)　Nがω-無矛盾であるなら，その肯定形も否定形もNで証明できないようなNの閉じた式が存在する．

注意　一般に，理論Kの任意の閉じた式について，その肯定形か否定形かどちらか一方が必ずKの定理となるとき，理論Kは完全である，という(§4.4)．したがって上の定理は，まさにこの完全性がNで成立しないことを述べている．そしてそれゆえに不完全性定理と呼ばれる．すなわち意味論的な完全性の否定ではない．しかし一方で，この定理は，後述するように，そこで存在するとされる問題の式が，内容的に真なる式と解釈できることから，結局は意味論的な完全性の否定も主張してくることになる．

証明の方針　では，どのようなアイディアによって上の定理は証明されるか．「私の言っていることは嘘である」という否定的自己言及文が，そのヒントとなる．この文は，肯定しても否定しても，その真偽が決まらない．そこでこの文に倣って，自分自身のNでの証明不可能性を主張するような式(Gとする)を，Nに実際につくることができれば，その式の肯定形も否定形もNで証明可能とすると矛盾を生みそうである．

さてそれでは，このアイディアをどのように実行していったらよいか．それにはGが自己言及的であることから，2つの準備が必要となる．1つは，Nについて語る文からなるメタ言語Mを考え，さらにそれを数式で表わしたM'を考えることである．またもう1つは，Nについて語る数式からなるM'をNの中へ写し込むことを考えることである．そこで次に，こうした準備の各々について，簡単に見ておこう．

MとM'について　MはNについて語る言語で，たとえば「x_1は自由変項である」，「$A\supset(B\supset A)$はNの論理公理である」，「$\forall x_1(x_1=x_1)$はNの定理である」などからなる．すなわちMの文は，Nの種々の記号形態を主語とし，それらの性質や関係などを述語としている．そしてとくに，「——なる式の列は——なる式のNでの証明である」…(1)，「——なる式の——なる自由変項に——なる項を代入したもの」…(2)などは，各々以後の議論で論点となるMの述語や主語である．

ところでNの記号には，§4.4の補題4.1の証明のさいに導入した方法によって，明らかに1対1に自然数を対応させることができる．つまりMの文の主語はゲーデル数で表わすことができる．したがってMの表現の方も，数についての表現として定式化することが可能である．実際，上の(1)，(2)も，改めて各々数論的な関係や関数として次の(1′)，(2′)のようになる．

PR(y, x): yはxなるゲーデル数をもつ式の証明のゲーデル数である…(1′)．

SB(u, v, w)＝ uなるゲーデル数をもつ式において，vなるゲーデル数をもつ自由変項の現われているすべてのところを，wなるゲーデル数をもつ項で代入した結果，得られる式のゲーデル数…(2′)．

しかもさらにこれらの数論的な関係や関数は，実はきわめて簡単な種々の数論的な関係や関数を使って，構成的に定式化されることも可能である(なお，その実行は実際にはかなり大変な仕事となるが，ここではいっさい省略)．とにかくMの文は，すべて数論的な命題となると同時に，完全にそれは数式で表記されることになるのである．このようなMの数式化はMの「算術化」(arithmetization)とも呼ばれ，Mを算術化した世界がM'である．

帰納関数　ところで上に，PRやSBなどは，きわめて簡単な関数や述語から構成されると述べたが，それは，PRやSBが，いわば，その成立・不成立やその値などが機械によっても計算可能であるような関係や関数として定式化されるということである．もう少し正確にいえば，それは，PRが下に定義するような「帰納的関係」(recursive relation)であり，SBが同じく下に定義するような「帰納関数」(recursive function)であるということである．

定義　$f(x_1,\cdots,x_n)$が，[I]の基本関数から，[II]～[IV]の操作を有限回使って定義される関数であるとき，$f(x_1,\cdots,x_n)$を帰納関数という．

［I］基本関数　1) $Z(x)=0$,　2) $N(x)=x+1$,　$U_i^n(x_1, \cdots, x_n)=x_i (1\leq i\leq n)$.

［II］代入　関数 $g, h_1, \cdots, h_m$ が与えられているとき，$f(x_1, \cdots, x_n)=g(h_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, h_m(x_1, \cdots, x_n))$ として f を構成する.

［III］帰納　関数 g, h が与えられているとき，1) $f(x_1, \cdots, x_n, 0)=g(x_1, \cdots, x_n)$,　2) $f(x_1, \cdots, x_n, y+1)=h(x_1, \cdots, x_n, y, f(x_1, \cdots, x_n, y))$ によって f を構成する.

［IV］μ-作用子　$\exists y(g(x_1, \cdots, x_n, y)=0)$ となる g が与えられたとき，$f(x_1, \cdots, x_n)=\mu y(g(x_1, \cdots, x_n, y)=0)$ として f を構成する．ただし $\mu y(g(x_1, \cdots, x_n, y)=0)$ は，$g(x_1, \cdots, x_n, y)=0$ を満足する y の最小のもの，を表わす.

定義　$R(x_1, \cdots, x_n)$ が帰納的関係であるとは，その特性関数 $C_R(x_1, \cdots, x_n)$ が帰納的であることである．ただし $R(x_1, \cdots, x_n)$ が成立しているとき，$C_R(x_1, \cdots, x_n)=1$，不成立のとき $C_R(x_1, \cdots, x_n)=0$ となる関数 $C_R(x_1, \cdots, x_n)$ のことを，R の特性関数という.

表現定理　次に M' と N との関係を見ておこう．M' が数論的な数式からなることから，当然 M' と N との間にはある種の対応が予想されるが，正確には下の表現定理としてまとめられる.

定義　1) 関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ が N で「表現可能」(representable) であるとは，次のような N の式 $Ax_1\cdots x_{n+1}$ が存在することである；

i) $f(k_1, \cdots, k_n)=k_{n+1} \Rightarrow \vdash_N A\bar{k}_1\cdots\bar{k}_n\bar{k}_{n+1}$,

ii) $\vdash_N \exists_1 x_{n+1}A\bar{k}_1\cdots\bar{k}_n x_{n+1}$.

2) 関係 $R(x_1, \cdots, x_n)$ が N で表現可能であるとは，次のような N の式 $Ax_1\cdots x_n$ が存在することである；

i) $R(k_1, \cdots, k_n)$ が真である $\Rightarrow \vdash_N A\bar{k}_1\cdots\bar{k}_n$,

ii) $R(k_1, \cdots, k_n)$ が偽である $\Rightarrow \vdash_N \neg A\bar{k}_1\cdots\bar{k}_n$.

(ただし，$\bar{k}$ は，M' の k に対応した N の「数字」(numeral) であり，0 に k 個の $'$ (N の関数) を付けたものである．たとえば，$\bar{0}=0$, $\bar{1}=0'$, $\bar{2}=0''$ など).

定理(表現定理)　1) 帰納関数はすべて N で表現可能である.

2) 帰納的関係はすべて N で表現可能である.

注意　結局，M' のうち機械的に計算できる帰納的なものが，N の中へ写し込まれるものとなる．なおこの定理の証明はここではいっさい省略する．不完全性定理の証明に現われる証明の中でも，この定理の証明は最も技巧的である.

***G* の構成**　さて一応準備ができたので，自己否定的な内容をもつ N の式 G をつくってみよう．そのためにまず，M' に現われる先の関係 PR と関数 SB および u に N の数字 $\bar{u}$ のゲーデル数を対応させる関数 G(u) (なおこれも帰納的である) を使って，新たに PR(y, SB(u, 15, G(u)))…(3′) なる帰納的関係を考える．すなわち (3′) は，$g(x_1)=15$ ゆえ，「y は u なるゲーデル数をもつ式の自由変項 x_1 のところに $\bar{u}$ を代入した式の証明の

ゲーデル数である」を表わしている．また以下では，(3′)は簡単に W(u, y) で表わすことにする．すると(3′)が帰納的であることから，表現定理によって，W(u, y) を表現する N の式が存在するといえる．そこでそれを Wx_1x_2 で表わすことにする．

次に，この Wx_1x_2 を使って N の式，

$$\forall x_2 \neg W x_1 x_2 \quad (*)$$

を考え，そのゲーデル数を n とする．そしてさらに，

$$\forall x_2 \neg W \bar{n} x_2 \quad (**)$$

をつくる．すると(**)のゲーデル数は，そのつくり方から，SB(n, 15, G(n)) であるといえる．また(**)は，M' の ∀y¬PR(y, SB(n, 15, G(n))) なる式を表わしているともいえる．すなわち(**)は「SB(n, 15, G(n)) となるゲーデル数をもつ式の証明のゲーデル数は存在しない」を表わしており，結局(**)は，「(**)は証明不可能である」という内容を表わす式といえる．つまり(**)が，つくろうとしている自己否定的な式 G に他ならない．

不完全性定理の証明　G が求められたので，あとは改めて次の(♯)，(♯♯)を証明すれば，はじめに掲げた(第１)不完全性定理の証明は終る．

(♯)　N が無矛盾なら，$\vdash_N \forall x_2 \neg W \bar{n} x_2$ ではない．

(♯)の証明　まず $\vdash_N \forall x_2 \neg W \bar{n} x_2$ と仮定する(背理法)．すると証明可能としたゆえ，その証明のゲーデル数が考えられる．それを k とすると，PR(k, SB(n, 15, G(n))) が成立する．すなわち W(n, k) が成立する．よって表現定理により，$\vdash_N W \bar{n} \bar{k}$．よって $\vdash_N \exists x_2 W \bar{n} x_2$, i.e. $\vdash_N \neg \forall x_2 \neg W \bar{n} x_2$．しかしこれは N が無矛盾であること((♯)の前提)と矛盾する．　□

(♯♯)　N が ω-無矛盾なら，$\vdash_N \neg \forall x_2 \neg W \bar{n} x_2$ ではない．

(♯♯)の証明　$\vdash_N \neg \forall x_2 \neg W \bar{n} x_2$ と仮定する(背理法)．すると，一方で ω-無矛盾なら無矛盾ゆえ，$\vdash_N \forall x_2 \neg W \bar{n} x_2$ ではないといえる．するとこれは(**)が証明不可能ということであるゆえ，W の意味から，どんな $\bar{k}$ をとっても W(n, k) は不成立といえる．そこで表現定理により，どんな $\bar{k}$ についても $\vdash_N \neg W \bar{n} \bar{k}$ となる．すると ω-無矛盾の定義により，$\vdash_N \exists x_2 \neg\neg W \bar{n} x_2$ ではない，となる．すなわち $\vdash_N \exists x_2 W \bar{n} x_2$ (i.e. $\vdash_N \neg \forall x_2 \neg W \bar{n} x_2$) ではない．しかしこれは仮定と矛盾する．　□

意味論的不完全性その他　以上で不完全性定理の証明の大筋を述べた．しかしその論点となる N の式 G の意味に注意しながら，改めて不完全性定理を見るとき，この定理が N の意味論的な不完全性をも示していることが直ちに分かる．すなわち G は，(**)の証明不可能であることを内容としていると解釈できるが，まさに定理によって(**)の証明不可能性が示された以上，その解釈のもとで G は真であるといえる．にもかかわらず，再び定理により，G は N の定理ではなく，よって真であっても，証明可能でない場合のあることが示されたのである．とにかくこの定理によって，学的な知の整理法

としての公理化が，必ずしも絶対的なものでないことが原理的に示されたのである．

さらにまた，不完全性定理からは，以下のような議論も可能である．まず，Nの無矛盾性を語っていると解釈できるNの式が考えられることに注意する．そしてそれをCon_Nで表わすことにする．つまり，Nの無矛盾性を語る命題が帰納的な関係を使って数式化できるのであり，そしてそれを表現するNの式がCon_Nというわけである．次に，このCon_Nと先のG(i.e. (**)の式)を使って，$Con_N \supset G$というNの式を考えてみる．すると，Nの式GがGのNでの証明不可能性を語っていると解釈できることから，$Con_N \supset G$なるNの式は，「Nが無矛盾なら，GはNで証明可能でない」という不完全性定理の一部(i.e. 先の(♯))を，語っていると解釈できる．そこで次にさらに，この不完全性定理を得るまでの議論を，すべて算術化してしまうことを考える．しかもそれをNに写すことを考える．確かにこれはきわめて大変な仕事である．しかし不可能なことではない．そしてそれをとにかく実行したとする．すると，(♯)が証明できた以上，$Con_N \supset G$も当然Nで証明可能となるはずである．すなわち$\vdash_N Con_N \supset G$を得るのである．

さてここで，$\vdash_N Con_N$と仮定してみよう．すると，MPにより直ちに$\vdash_N G$を得る．しかしこれは不完全性定理の結果と矛盾する．Nが無矛盾のとき，GはNで証明可能ではないからである．したがっていまや，「Nが無矛盾なら，$\vdash_N Con_N$ではない」，いいかえれば，「Nが無矛盾であるなら，Nの無矛盾性をNにおいて証明することはできない」ということがいえるのである．そしてこれが，§4.1でも触れたゲーデルの「第2不完全性定理」と呼ばれるものに他ならない．

参　考　書

記号論理に関する図書は，和洋を問わず，現在では数多くある．ここでは本書の執筆にあたって参考にしたものを中心に，そのごく一部を掲げておく．

[1] J. L. Bell & M. Machover, *A Course in Mathematical Logic*, North-Holland, 1977. ☆☆

[2] J. L. Bell & A. B. Slomson, *Models and Ultraproducts: an Introduction*, North-Holland, 1969. ☆☆

[3] A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton U. P., 1956. ☆☆

[4] P. J. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin, 1966. (近藤・坂井・沢口訳『連続体仮説』東京図書，1972年.) ☆☆☆

[5] J. N. Crossley & others, *What is mathematical logic?*, Oxford U. P., 1972. (田中訳『現代数理論理学入門』共立出版，1977年.) ☆

[6] P. Halmos, *Lectures on Boolean Algebras*, Van Nostrand, 1963. ☆☆☆

[7] D. Hilbert & W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, 6te Aufl. 1972. (石本・竹尾訳『記号論理学の基礎』大阪教育図書，1978年.) ☆

[8] G. Hunter, *Metalogic: An Introduction to the Metatheory of Standard First-Order-Logic*, Macmillan, 1971. ☆

[9] 井関清志『記号論理学(命題論理)』，槙書店，1968年. ☆

[10] 井関清志『記号論理学(述語論理)』，槙書店，1973年. ☆

[11] S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, Van Nostrand, 1952. (reprint版，東京大学出版会，1969年.) ☆☆☆

[12] S. C. Kleene, *Mathematical Logic*, John Wiley & Sons, 1967. (小沢訳『数学的論理学』明治図書，1973年.)

[13] 栗原俊彦・中村昭『論理数学I—数理論理学』共立出版，1975年. ☆

[14] E. J. Lemmon, *Beginnig Logic*, T. Nelson & Sons, 1965. (竹尾・浅野訳『論理学初歩』世界思想社，1973年.)

[15] 前原昭二『数理論理学序説』共立出版，1966年.

[16] 前原昭二『記号論理学入門』日本評論社，1967年.

[17] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, 2nd ed., Van Nostrand, 1979. ☆☆

[18] J. D. Monk, *Mathematical Logic*, Springer, 1976. ☆☆

[19] H. Rasiowa & R. Sikorski, *Mathematics of Metamathematics*, Polish Acad. of Science, 3rd ed., 1970. ☆☆

[20] R. Rogers, *Mathematical Logic and Formalized Theories, A Survey of Basic Concepts and Results*, North-Holland, 1971. ☆

[21] 斎藤哲郎『記号論理学』理想社，1964年.

[22] 坂本百大・坂井秀寿『現代論理学』東海大学出版会，1971年.

[23] J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967. ☆☆☆

[24] R. M. Smullyan, *First-Order Logic*, Springer, 1968. ☆

[25] 末木剛博・坂井秀寿・大出晁『現代論理学』弘文堂，1978年. ☆

[26] P. Suppes, *Introduction to Logic*, Van Nostrand, 1957.

[27] 竹内外史『現代集合論入門』日本評論社，1971年. ☆☆

[28] 吉田夏彦『論理学』培風館，1958年.

本書の第1,2章では，[12],[24],[26]などを参考にした．第3,4章では，主に[1],[8],[17]などを参考にした．とりわけ[17]には多くを負っている．第5章は，主に[2],[6],[19]などを参考にした．また[5],[20]は，記号論理全体の見通しや考え方を学ぶ上で参考になった．

ところで，本書に続いて，さらに記号論理の種々のテーマに進んでいく場合について，簡単に述べておこう．まず公理的集合論については，上記の[1],[17],[23]に含まれる該当部分や，[4],[27]がある．それ以外には，下記の[33]を一冊追加しておく．次に，不完全性定理や非決定性の問題については，上記の[11]が古典的である．また[1],[12],[13],[17],[18],[25]にも該当部分が含まれている．それ以外には，下記の[30],[31],[32]などが手頃である．モデル論については，上記の[2]があり，その他のものとしては，下記の[29]を一冊添えておく．

[29] C. C. Chang & H. J. Keisler, *Model Theory*, North-Holland, 1973. ☆☆

[30] G. Boolos & R. Jeffrey, *Computability and Logic*, Cambridge U. P., 2nd ed., 1980. ☆

[31] M. Davis, *Computability and Unsolvability*, McGraw-Hill, 1958. (渡辺・赤 訳『計算の理論』岩波書店，1966年.) ☆

[32] 前原昭二『数学基礎論入門』朝倉書店，1977年. ☆

[33] 田中尚夫『公理的集合論』培風館，1982年. ☆☆

なお本書では触れられていない様相論理については，下記の[36],[37]が手頃な入門書である．また[39]などもある．また同じく本書では触れられていない記号論理学の成立史については，下記の[38]があり，[35]が便利である．逆に，新しい動向を学ぶには，

下記の[34]がその手がかりを与えてくれる.

[34] J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, 1977. ☆☆☆

[35] J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic*, Cambridge U. P., 1967. ☆☆

[36] G. E. Hughes & M. J. Cresswell, *An Introduction to Modal Logic*, Methuen, 1968. ☆

[37] 神野慧一郎・内井惣七『論理学―モデル理論と歴史的背景』ミネルヴァ書房, 1976年. ☆

[38] 末木剛博『記号論理学―その成立史の研究』東京大学出版会, 1962年. ☆

[39] 内田種臣『様相の論理』早稲田大学出版部, 1978年. ☆

注意 一応の目安として, 難易度を星印で表わしてみた. すなわち☆で初級, ☆☆で中級, ☆☆☆で上級を表わす. 無印は, 全くはじめて学ぶひと向きである.

主な記号一覧

(　)内の数字は，その記号が最初に導入されているページを示す．

$\wedge$	連言　(8)
$\vee$	選言　(8)
$\supset$	条件法　(8)
$\neg$	否定　(8)
$\equiv$	同値　(14)
$\forall$	全称記号　(39, 42)
$\exists$	存在記号　(39, 42)
$=$	等号　(67)
$\exists_1, \exists!$	一意的存在　(70)
ι	記述子　(71)
$\bigwedge_{i=1}^{n}$	n 個の連言　(22)
$\bigvee_{i=1}^{n}$	n 個の選言　(22)
$1, 0$	真理値　(10)
e_{ij}	真理値　(22)
$\rightarrow$	推論記号　(23, 55)
$\models$	意味論的推論　(25, 55)
$\not\models$	$\models$の否定　(48)
$\vdash$	証明可能，演繹可能　(75, 81)
$P, Q, R, \cdots; P_i; X, Y, Z, C; X_i$	命題論理の要素式　(8, 9)(18, 21)
$P, Q, R, \cdots; P_i{}^n, P_i$	述語記号　(41)
$f, g, h, \cdots; f_i{}^n, f_i$	関数記号　(42)
$a, b, c, \cdots; a_i$	個体常項　(42)
$x, y, z, \cdots; x_i$	個体変項　(42)
$\alpha, \beta, \gamma, \cdots; \alpha_i$	不確定名　(59)
$t, u; t_i$	項　(42)
$A, B, C, \cdots; A_i, B_i$	論理式　(9, 43)
Γ	論理式の列あるいは集合　(75, 81)
$\mathbf{I}$	解釈　(46, 103)

$\mathscr{L}$	束 (137)
$\mathscr{B}$	ブール代数 (140)
2	2元からなるブール代数 (150)
$\mathscr{F}$	論理式の集合 (155, 162)
$\mathscr{L}_1$	リンデンバウム代数（命題論理の） (157)
$\mathscr{L}_2$	リンデンバウム代数（述語論理の） (162)
ϵ	集合の要素 (90)
ϕ	空集合 (92)
ω	自然数の集合 (92)
$\subseteq$	部分集合（包含関係） (92)
$\{x:\ \}$, $\{\ \}$	集合 (90, 91)
$\langle\ ,\ \rangle$	順序対 (91)
$\cap, \cup, c$	共通部分，合併集合，補集合 (91)
$\mathcal{P}, \mathcal{P}_\omega$	巾集合 (92, 153)
h^{-1}“$\{\ \}$	{ }の h による逆像 (144)
$\Leftrightarrow$	同値（地の文での） (24)
$\underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}$	右側による左側の事柄の定義 (14)
$\Rightarrow(\Leftarrow)$	ならば（地の文での） (15)

注意　i)上の表でも明らかなように，文脈から考えて混乱することがない限り，同じ記号を異なった意味で使う場合がある．ii)本書では，アルファベットの立体活字とイタリック体活字とは，全く異なった文字とみなしている．

索　　引

さ 行

た　行

な　行

は　行

ら 行

わ 行

著者略歴

1939年　東京に生れる
1963年　東京大学文学部哲学科卒業
1967年　東京大学人文科学研究科博士課程退学，
　　　　東京工業大学助手を経て
現　在　千葉工業大学教授

主要著訳書

「哲学」(共著，1984年，勁草書房)
シャッファー「こころの哲学」(訳，1971年，培風館)

記号論理学

1984年11月30日　初　版
1999年 4 月 9 日　16　刷

[検印廃止]

著　者　清水義夫（しみずよしお）

発行所　財団法人　東京大学出版会
　　　　代 表 者　河野通方
　　　　113-8654 東京都文京区本郷 7-3-1
　　　　電話 03-3811-8814・振替 00160-6-59964

印刷所　株式会社理想社
製本所　有限会社島崎製本

ISBN 4-13-012018-2　Printed in Japan